ISSN 1023-7526

傳播數學知識・促進數學教育

數學傳播 季刊

中央研究院數學研究所　發行

應用數學專題

淺談統計

淺談「囚徒困局」現象的應用

淺談固定點定理及其應用

機械振動的一些現象和數學問題

78
民國八十五年六月
第二十卷第二期

數學傳播 季刊

稿約

本刊以傳播數學知識及促進數學教育爲宗旨。讀者對象包括中學、大學和研究所師生。大凡和數學有關之專題論述、教學心得、問題研討或書評書介都在歡迎之列。

來稿

一、文字應流暢精確，以不超過一萬五千字爲原則。

二、若有特定的讀者對象（如中學程度、大學程度等）請在文首註明。

三、較專技性文稿請附摘要，並儘可能列出該文所使用之關鍵字、詞。

四、翻譯稿請附原文，註明詳細出處，並請取得原著作所有權人同意授權。

五、請用橫向有格稿紙繕寫清楚。

六、圖、表請用黑墨繪製白紙上，黏貼文稿適當位置，並請編列號碼。

七、翻譯稿所譯專有名詞，其不常用或初用者請附註原文。

八、來稿請註明作者姓名、地址、服務機關或就讀學校及年級，發表時可用筆名。

九、本刊對來稿有刪改權，未能刊登稿件將退還作者。

十、請寄：台北市南港區（11529）中央研究院數學研究所數學傳播編輯部。

發行人：黃啓瑞
出版者：中央研究院數學研究所
地址：臺北市南港區研究院路二段一二八號
（電話：7821848・7851209-11）
編輯委員：黃啓瑞、劉豐哲、謝聰智、杜寶生
葉永南
編輯：呂素齡
出版登記：局版臺誌字第1495號
印刷者：永裕印刷廠
打字行：星格瑪企業社
（電話：620-1648）
總經銷：學英文化事業有限公司
新店市民權路130巷6號
郵政劃撥：0100434-8
中央研究院數學研究所
特價：新臺幣80元（長期訂購一年300元）
經銷處：全省各大書局
台北縣市：文翔、衆文、永大、弘雅、書香林、薪橋、僑大、光統、文源、翰輝、東方、文笙、黎明、建弘、幼獅、宏昇、何嘉仁、漢興、正中、集大祥、偉群、萬泰、自力、誼美、水準、今日、永漢、新禾、益群、益民、百葉、今博、鑫日、元大、久大、中興大學、台北工專、紀伊國屋、黎光、師大、曉園、聯經、再興、偉新、蒲公英、宏欣、桂冠、上達、新學友、政大、宇城、建盈、大有爲、文林、文海、淡友、天龍、人人、亨得利、文達、冠德、遠大
苗栗：今古大觀
台中縣市：新大方、興大、新學友、國寶、光南、新禾、敦煌、紀伊國屋、黎明、中一、中華兒童、三民、永漢、東興、主恩、諾貝爾、文星
草屯：南益
員林：中山、諾貝爾
斗六：建中、大山、諾貝爾
嘉義：義豐、鴻圖、光南、嘉聯
台南縣市：南台、南一、欣欣、成大、文山、遠東、國強、金寶、敦煌、超越
高雄縣市：ㄅㄆㄇ、三民、站前、前程、登文、七賢、富識界、青年、瓊林、復文、敦煌、光統、青聯、大岡山、時代
屏東：復文、百科、卓越、立大

中華郵政台字第3829號第一類新聞紙

數學傳播季刊

編者的話

民國82年許世壁教授在清華大學數學系開了一個類似於“通識”的“聽演講”課程「應用數學導論」。在本課程裡他們邀請了國內許多學者專家，來自不同的領域，如數學統計、物理、資訊、電機、生物、政治、經濟等，講述數學如何應用與發展。這個課程之主要對象爲大學部三、四年，具有微積分，線性代數等預備知識的學生。他們希望這些演講能增廣學生們的見識，並引起學生對數學的興趣。希望數學對學生們不再是一個嚴峻、冰冷冷的科目，而是一個有許多有趣的源頭的學科。

在本課程裡，他們將這些演講整理成文章，發表在「數學傳播」以資推廣。在83年12月的第72期「數學傳播」，我們登了一個包含五篇文章應用數學專題，本期我們另闢一個應用數學專題。以下爲本次專題的簡介。

首先 Texas A&M University 陳鞏教授在「機械振動的一些現象和數學問題」裡以生動的例子如彈簧的振盪，無線電波來描述常微分方程的振動系統。而後他在偏微分方程的振動系統裡，介紹了以小提琴爲例的共振現象。在這裡我們可以將偏微分方程裡的重要課題特徵值問題 (Egenvalue problem) 及節線臆測 (Nodal line conjecture) 與物理世界結合在一起。

台大陳宜良教授延續其前一講 (數學傳播第十七卷第一期82年3月)「守恆律方程組簡介」，介紹震波 (shock wave) 的另一個重要觀念熵條件 (entropy condition)。說明它與守恆律解的唯一性以及熱力學第二定律相關。

清大林文偉教授在「淺談固有值問題 $Ax = \lambda x$ 數值解法」介紹了求固有值、固有向量的數值方法的重要概念。其精彩處是以牛頓法 (Newton Method) 說明爲什麼逆冪法 (Inverse Power Method) 會快速收斂。

中正大學吳志揚教授在「淺談固定點定理及其應用」以生動的例子說明固定點的重要性。同時文中以 Brouwer 固定點定理爲例，說明了空間決定了固定點的存在，以 Banach 固定點定理爲例說明了映射 (mapping) 決定了固定點的存在。

中研院魏慶榮教授在「淺談統計」以生動的日常生活例子說明了如何正確地做好統計的三個工作，數據的收集，數據的整理與數據的分析。他同時向讀者介紹了幾本統計入門的好書。

中研院李國偉教授在「淺談『囚徒困局』現象的應用」裡，說明數學亦可以應用到人文社會科學。讀者可藉本文瞭解一些「對局論」(game theory) 的涵義與精神。

數學傳播季刊

78 第二十卷 第二期

目錄

應用數學專題

機械振動的一些現象和數學問題 …… 陳 聳 3

淺談「囚徒困局」現象的應用 …… 李國偉 26

淺談統計 …… 魏慶榮 31

守恆律方程組簡介 (II) —— 熵條件 …… 陳宜良 37

淺談固有值問題$Ax=\lambda x$數值解法 …… 林文偉 41

淺談固定點定理及其應用 …… 吳志揚 46

機率論為何要建立在機率空間上面? …… 蔡聰明 56

數學美賞析 (下) …… 譚建國 69

數學發現中的想像 …… 朱 茱 77

高中生應該知道的積分與應用 …… 石厚高 83

機械振動的一些現象和數學問題

陳 犖

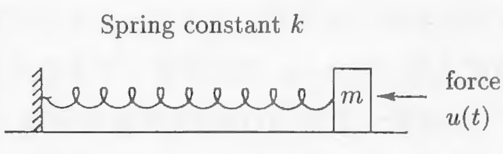
一. 簡介: 常微分方程的振動系統

機械振動是我們日常生活中經常體驗到的一種運動。譬如說, 我們看到樹葉在和風吹拂下, 來回地搖曳。我們搭汽車通過崎嶇的路面時, 可感到自己隨著車身上下擺動。我們沈醉於優美的小提琴的演奏曲中, 它是由琴弦振動所發出的音波。像這些林林種種的例子, 實在太多了。我們可以總結一句話: 在巨觀 (macroscopically) 的世界裡, 任何具有 彈性 及 質量的物體, 都會作機械振動。事實上, 在微觀 (microscopically) 的世界裡, 次原子的質點也具有 量子力學的波動 性質, 這些性質基本上算是振動運動。因此自然界裡的物理系統與工程機械一樣, 都會振動。在本文裡, 作者想從振動力學數學模型的一些方程式及它們的解, 來說明一些機械振動的現象, 以增加讀者在學習工程及物理上, 對這一方面的瞭解。

學習數學的人喜歡嚴格性。因此我們首先想到的問題, 就是什麼是所謂的「機械振動」。要給它一個嚴格的定義並不容易。不過我們可以籠統的說, 機械運動是具有某種週期性, 類似於波動, 並牽涉到能量傳遞的運動。自從十六世紀的啓蒙時代開始, 科學家及數學家就開始對振動運動有了興趣。在這一方面, 最早有所建樹的是英國大科學家虎克 (R. Hooke, 1635–1703)。他是有名的虎克定律 (發明於1660年) 的發明人, 比牛頓 (1643–1727) 出生略早; 在科學上也貢獻卓著。虎克在研究彈簧的振動時, 寫下了有名的簡諧運動方程式

$$m\ddot{x}(t) + kx(t) = u(t), \quad t > 0。 \qquad (1)$$

這裡 m 表示彈簧所懸的質量, k 爲彈簧的彈性係數, $x(t)$ 爲彈簧在 t 時的位移, $\ddot{x}(t)$ 爲 $x(t)$ 的二階時間導數, 也就是加速度; $u(t)$ 爲外力。請見圖一。



圖一. 簡諧運動

方程式 (1) 是一種基本的常微分方程。當外無力, $u(t)$ 恆爲零時, 它的解可寫出如下:

$$x(t) = C_1 \cos \omega_0 t + C_2 \sin \omega_0 t,$$
$$\omega_0 = \sqrt{k/m}, \quad C_1, C_2 \text{ 爲常數} \qquad (2)$$

這個結果非常漂亮。它顯示出簡諧運動是週期性的, 其週期爲 $2\pi/\omega_0$。但是後來的人逐漸發現有點問題。因爲 (2) 告訴我們, 振動運動產生後, 它就會永無休止的繼續振動下去。你曾經親眼見過一個彈簧永遠振動不停嗎? 不可能! 也就是說, (2) 與我們的實際觀察不合。當然, 這個問題還是出在 (1), 因爲虎克所取的數學模型太簡單了, 以致有些要緊的物理因素沒有考慮到; 其中之一就是摩擦力, 造成能量耗損。因此, 讓我們在方程式 (1) 中, 加入 $u(t) = -2\gamma\dot{x}(t)$, 意即摩擦力與速度成正比, 但方向相反。這項一般稱爲阻泥。從而得到

$$m\ddot{x}(t)+2\gamma\dot{x}(t)+kx(t)=0, \quad t>0。 \qquad (3)$$

方程式 (3) 的解爲

$$x(t)=e^{-\gamma t}(C_1\cos\omega_1 t+C_2\sin\omega_1 t), \qquad t>0, \quad (4)$$

$$\omega_1=\sqrt{\frac{k}{m}-\gamma^2}, \quad \gamma>0, \quad \gamma^2<\frac{k}{m}。$$

上式告訴我們當時間 t 增大時, 位移依指數衰減至零。因此 (4) 式的解就合乎實際得多了。然而微分方程 (3) 所代表的數學模型, 仍有一個缺點, 即它尚未考慮到其它外力作用。在很多實際的情況下, 外力的作用是週期性的。因此我們把方程式 (3) 再改進爲

$$m\ddot{x}(t)+2\gamma\dot{x}(t)+kx(t)=F\cos(\omega t+\phi)。 \quad (5)$$

這方程式的通解爲

$$x(t)=e^{-\gamma t}\left(C_1\cos\omega_1 t+C_2\sin\omega_1 t\right)$$

$$+\frac{F}{m\sqrt{(\omega_1^2-\omega^2)^2+r\gamma^2\omega^2}}\cos(\omega t+\phi-\delta) \qquad (6)$$

當時間增加時, $e^{-\gamma t}(C_1\cos\omega_1 t+C_2\sin\omega_1 t)$ 項很快即衰減至零, 故只剩下 $F\cos(\omega t+\phi-\delta)\Big/\left[m\sqrt{(\omega_1^2-\omega^2)+4\gamma^2\omega^2}\right]$。這項除了相差 δ 以外, 頻率 ω 並沒有改變, 但振幅卻變了。我們定出

振幅放大率

$$=\left[\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_1^2}\right)^2+4\left(\frac{\gamma}{\omega_1}\right)^2\left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2\right]^{-1/2} \qquad (7)$$

它具有這樣的特性: 若是系統中沒有阻泥, 即 $\gamma=0$, 且外力的頻率 ω 與系統的頻率 ω_1 一致的話, 則放大率爲無限大。因此就算一開始系統的振幅很小, 經過這週期性外力作用後, 振幅會趨於無限大。這就是所謂的共振現象。它在振動力學的理論及應用上, 佔了極重要的地位。

一般而言, 除非在理想的狀況下, 阻泥系數 γ 是不會等於零的。不過, 只要 γ 相當小, 而且外力頻率 ω 也相當接近系統的自然頻率 ω_1 的話, 那麼放大率是相當可觀的。這種性質也給我們在工業上很好的應用。譬如說, 在電子學裡的 $R-L-C$ 電路, 它滿足的振盪方程式

$$\frac{1}{C}\ddot{I}(t)+R\dot{I}(t)+LI(t) = I_0\cos(\omega t-\delta), \qquad (8)$$

$I(t) =$ 電路在時間 t 的電流

基本上就跟方程式 (5) 類似。要是 (8) 式右邊表示著的是透過天線感應線圈所接收的無線電波信號的微小感應電流, 那麼這個 $R-$

$L-C$ 電路就可把無線電波信號放大, 再透過麥克風, 到可聽的地步。這就是收音機了。

以上的方程式 (5) 與 (8), 右邊稱爲輸入, 而方程式的解爲輸出。這輸入與輸出之間的關係是線性的, 譬如說, 輸入增加三倍, 則輸出也必會增加三倍。但是很多振動現象不是線性的。一個很簡單的例子, 就是單擺運動, 其方程式爲

$$m\ell^2\ddot{\theta} + mg\ell\sin\theta = 0, \qquad (9)$$

$\ell =$ 擺長, $m =$ 擺錘質量, $g =$ 重力加速度, $\theta =$ 單擺與垂直線的夾角。這裡 $mg\ell\sin\theta$ 是一非線性項, 因此對方程式 (8) 那樣的線性方程式的解法與理論就不適用於 (9)。一般非線性振動的二階常微分程式可寫爲

$$m\ddot{x}(t)+\phi(\dot{x}(t))+f(x(t)) = F\cos(\omega t+\psi) \qquad (10)$$

的形式。此處的 f 或 ϕ (二者至少有其一) 是非線性的函數。一個很有名的例子, 是 van der Pol 的方程式, 它是在廿世紀初葉, 由荷蘭科學家 van der Pol 在研究加有栅極眞空管的控制電路上, 所提出的一個數學模型:

$$m\ddot{x}(t)+[-\alpha\dot{x}(t)+\beta\dot{x}(t)^3]+kx(t)=0, \qquad (11)$$
$$t>0, m, \alpha, \beta, k>0。$$

(在 (11) 式中, 我們假設右端項, 即輸入信號, 爲零。) 對 (11) 式所代表的振動系統而言, 它在時間 t 的能量爲

$$E(t) = \frac{1}{2}m\dot{x}(t)^2 + \frac{1}{2}kx(t)^2。 \qquad (12)$$

因此它對時間 t 的變化率爲

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}E(t) &= [m\ddot{x}(t)+kx(t)]\,\dot{x}(t)\\ &= \left[\alpha\dot{x}(t)-\beta\dot{x}(t)^3\right]\dot{x}(t)\\ &= \alpha\dot{x}(t)^2-\beta\dot{x}(t)^4。\end{aligned} \qquad (13)$$

這個結果告訴我們

$$\frac{d}{dt}E(t)\begin{cases}\le 0\,, & |\dot{x}(t)|\ge\sqrt{\alpha/\beta},\\ & \text{如果}\\ \ge 0\,, & |\dot{x}(t)|\le\sqrt{\alpha/\beta}。\end{cases} \qquad (14)$$

這個特性, 告訴我們 $|\dot{x}(t)|$ 不能增得太大, 因爲它太大了, 就會使 $E(t)$ 減小, 也就會使 $|\dot{x}(t)|$ 減小。反之, $|\dot{x}(t)|$ 也不能太小, 因爲這樣會使能量 $E(t)$ 增大。這種自動調節的功能, 在所謂伺服機械(servomechanism) 或自動控制系統的設計上, 非常有用。譬如說, 我們可以利用這個性質, 用來作電子電路的保護設計, 使電路上的電流, 不超過荷載範圍, 以免電路有燒毀之虞。(13) 及 (14) 所具有的特性, 數學家稱爲「自發振盪」(self-excited oscillation), 意味著這種振盪系統能夠自我維持, 在一定的振幅內, 振盪不息。廿世紀的大數學家龐卡瑞 (Henri Poincaré) 證明了 van der Pol 方程式 (11) 的解, 一定趨近於週期函數。最近二十年來, 在所謂動力系統 (Dynamical Systems) 的研究上, 我們對 (11) 又有嶄新的瞭解; 即在 (11) 式右邊加入輸入項後:

$$m\ddot{x}(t)+[-\alpha\dot{x}(t)+\beta\dot{x}(t)^3]+kx(t) = F\cos(\omega t+\delta), \qquad (15)$$

如果 F 及 ω 取值在某些範圍內, 則 (15) 式之解會具有混沌(chaos) 現象。這在目前算是時髦的研究課題之一。

二. 偏微分方程的振動系統

上節所提到的常微分方程的振動數學模型, 在研究連續體力學 (continuum mechanics) 裡的振動現象, 是不夠用的。這時, 要用偏微分方程式才可把振動過程用數學描述出來。我們先來看一個簡單的振動弦方程式的例子。(這個方程式也稱爲波動方程,是應用數學中最基本的方程式之一。)

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}=0, \qquad (16)$$
$$t>0, \quad 0<x<L,$$

$u(x,t)=$ 在位置 x, 時間 t, 弦的垂直位移,

$$u(0,t)=0, \quad u(L,t)=0, \quad (17)$$
$$L=\text{弦長。}$$

在 (17) 中的兩個關係, 稱爲邊界條件。它的物理意義爲弦的兩端點是固定的。我們試試找找看方程式 (16)、(17) 的解, 用 $u(x,t)=\psi(t)\phi(x)$ (所謂分離變元法) 代入 (16), 得到

$$-\frac{\phi''(x)}{\phi(x)}=-\frac{\psi''(t)}{\psi(t)}。 \qquad (18)$$

因 x 與 t 兩變元互相獨立, 上式要成立的話, 若且唯若左右都等於某常 數 ω^2 , 故得

$$\begin{cases} \phi''(x)+\omega^2\phi(x)=0, \ 0<x<L, \\ \phi(0)=\phi(L)=0。\end{cases} \qquad (19)$$

方程式 (18) 只有在 $\omega^2=n^2\pi^2$ 時, 有非平凡解:

$$\phi(x)=c\sin(n\pi x/L),$$
$$c\neq 0, \quad n=1,2,3,\cdots.$$

這樣子的解, 稱爲方程式 (18) 或 (16) 的特徵函數(eigenfunctions)。由 (18) 也可看出來, $\psi(t)$ 的解爲

$$\psi(t)=d_1e^{in\pi t}+d_2e^{-in\pi t},$$

故

$$u(x,t)=c\sin(n\pi x/L) \times\left[d_1e^{in\pi t}+d_2e^{-in\pi t}\right] \qquad (20)$$

爲 (16) 的解。這樣的解是具有單一 (特徵) 頻率的, 即 $n\pi$ 。把全部這的解加起來, 我們即得到一個方程式 (16) 及 (17) 的通解

$$u(x,t) =\sum_{n=1}^{\infty}\left(d_{1n}e^{in\pi t}+d_{2n}e^{-in\pi t}\right)\sin\frac{n\pi x}{L}$$

這就是一個富里哀級數。

特徵函數的物理意義與共振現象有關。這怎麼講呢? 我們從兩種角度來看。

第一個: 對於波動方程 (16) 而言, 不管邊界條件如何, 只要滿足波動方程的函數就稱爲波動函數。譬如 $e^{ik(t-x)}$ 與 $e^{ik(t+x)}$ 就是。$e^{ik(t-x)}$ 是一個向右傳遞的波, 而 $e^{ik(t+x)}$ 是一個向左傳遞的波。我們可以把 (16) 的解寫爲 $u(x,t)=c_1e^{ik(t-x)}+c_2e^{ik(t+x)}$ 。但因弦本身的長度有限, 所以這兩個向右及向左傳播的波會碰到邊界而反射。我們利用 (17) 的邊界條件得

$$c_1e^{ik(t-x)}+c_2e^{ik(t+x)}=0,$$

當 $x=0$ 及 $x=L$ 成立。故

$$\begin{cases} c_1e^{ikt}+c_2e^{ikt}=0, \\ c_1e^{ik(t-L)}+c_2e^{ik(t+L)}=0。\end{cases}$$

從而得

$$\begin{cases} c_1+c_2=0, \\ c_1+c_2e^{i2kL}=0, \end{cases} \tag{21}$$

以致

$$e^{i2kL}=1, \quad 即\ kL=n\pi,$$

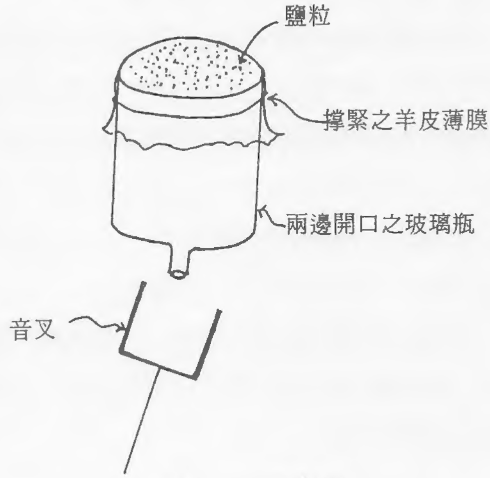
$$n=0,\pm1,\pm2,\cdots \tag{22}$$

大家可以看出來, (21) 與 (22) 可以推到 (20)。這告訴我們說, 特徵函數所具有的頻率, 恰能使波從 $x=0$ 至 $x=L$ 傳遞再反射回 $x=0$ 後, 相位角不變。故波動得以來回傳遞, 而不因相位差重疊而消滅。這與第一節中所討論的共振現象基本上類似。

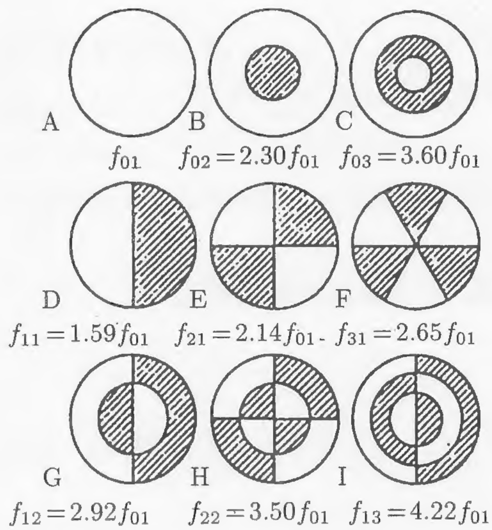
第二個角度: 我們以小提琴為例。要是小提琴只有弦而沒有音箱的話, 那麼撥弦所彈奏的曲子, 聲音是非常弱的。但是附上了音箱, 樂曲的聲音就清析悅耳可聞了。可見音箱有放大音量的效果, 這就是共振現象。

從這裡看來, 小提琴音箱的製造, 就是一門相當大的學問了。不論從材料或形狀上, 都必須講究, 使它能夠發出它特有的音色。因此你聽小提琴演奏時, 可以知道彈的不是胡琴。所謂音色, 就是音箱對不同頻率的音波, 有不同的放大率, 然後 產生的和音效果。目前小提琴音箱的形狀, 是音匠們幾百年來憑其經驗不斷改革演進而成。

到了十九世紀, 聲學也隨著其它物理科門, 有了長足的進展。德國的大數學物理學家 H. Helmholtz 在1885年, 出版了在聲學方面的首本鉅著, 書名是「論音感」(On the Sensations of Tone)。它裡面有提到一個鑑定音波頻率的古老辦法: 用一張薄膜罩在一個去底的瓶子上, 周圍用線綁緊 (見圖二)。在薄膜上灑鹽, 然後用不同頻率的音叉在瓶口附近敲, 使音波傳入瓶內。



圖二. 音叉實驗



圖三. Helmholtz 在他書中所畫的節線形狀
(其排列順序應以最低頻率倍數為準,
即 A,D,E,B,F,G,H,C,I)

如此, 我們會發現在 某個特定頻率下, 薄膜上的鹽粒會全部被震下來。這就是最低的特徵頻率。若頻率繼續加高, 則鹽粒又不爲所動。但高到某一程度, 鹽粒又被震了下來, 但不是全部, 沒震下的形成一條直線, 稱爲節線。這時的頻率就是次低的特徵頻率。重複這個實驗, 讓頻率不斷上升, 我們就會得到不同形狀的節線及共振頻率, 見圖三。

從這個實驗, 我們得知共振現象並不是對任何頻率都會發生, 它只會發生在某些特殊的頻率, 這些特殊的頻率就跟特徵值 (eigenvalue) 和特徵函數 (eigenfunction) 有關, 在數學上稱爲特徵值問題 (eigenvalue problem), 就是我們下一節的主題。

我們在本節提到的 (空間) 一維波動方程 (16), 在高維度的空間裡, 它可推廣爲 N 維空間的波動方程

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} - \Delta u(x,t) = 0, \tag{23}$$

這裡 $x = (x_1, \cdots, x_n)$ 是 N 維空間的位置向量, 而 $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_N^2}$ 是 N 維空間的拉普拉斯算子 (Laplacian)。我們再提幾個常見的機械振動中的偏微分方程:

(結構力學中的振動樑方程式)

$$\rho\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} + EI\frac{\partial^4 u(x,t)}{\partial x^4} = 0.$$
$$0 < x < L, \quad t > 0, \ (L = \text{樑長}) \tag{24}$$

(量子力學中的薛汀格方程式)

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} - i\hbar\Delta u(x,t) = 0,$$
$$x = (x_1, \cdots, x_n)。 \tag{25}$$

(電磁學中的馬克斯威爾方程式)

$$\begin{cases} \frac{\partial \overline{E}(x,t)}{\partial t} - \nabla\times \overline{H}\,(x,t) = 0, \\ \frac{\partial \overline{H}(x,t)}{\partial t} + \nabla\times \overline{E}\,(x,t) = 0, \end{cases} \tag{26}$$

$x = (x_1, x_2, x_3)$。

(結構力學中的薄板方程式)

$$\rho\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} + D\Delta^2 u(x,t) = 0,$$

$$x = (x_1, x_2), \quad \Delta^2 = \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\right)^2。 \tag{27}$$

(結構力學中的圓柱形薄殼方程式)

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u(x,s,t)}{\partial x^2} + \frac{1+\nu}{2}\frac{\partial^2 v(x,s,t)}{\partial x\partial s} \\ +\frac{1-\nu}{2}\frac{\partial^2 u(x,s,t)}{\partial s^2} + \frac{\nu}{a}\frac{\partial w(x,s,t)}{\partial x} = 0, \\ \\ \frac{1+\nu}{2}\frac{\partial^2 u(x,s,t)}{\partial x\partial s} + \frac{1+\nu}{2}\frac{\partial^2 v(x,s,t)}{\partial x^2} \\ +\frac{\partial^2 v(x,s,t)}{\partial s^2} + \frac{1}{a}\frac{\partial w(x,s,t)}{\partial x} = 0, \\ \\ \frac{h^2}{12}\Delta^2 w(x,s,t) + \frac{1}{a}\left[\frac{1}{a}w(x,s,t)\right. \\ \left. +\frac{\partial v(x,s,t)}{\partial s} + \nu\frac{\partial u(x,s,t)}{\partial x}\right] \\ +\frac{1-\nu^2}{Eh}m\frac{\partial^2 w(x,s,t)}{\partial t^2} = 0。 \end{cases} \tag{28}$$

(固體力學振動方程式)

$$\begin{aligned} &(\lambda+2\mu)\nabla\left(\nabla\cdot \vec{u}\,(x,t)\right) \\ &\quad -\mu\nabla\times\nabla\times \vec{u}\,(x,t) \\ &\quad -\rho\frac{\partial^2 \vec{u}\,(x,t)}{\partial t^2} = 0。 \end{aligned} \tag{29}$$

方程式 (26) 可看作是 (24) 在二維空間的推廣; 順便一提。當然, 以上所提的僅算是很少數的例子。譬如說, 光是殼的方程式, 就還有球形薄殼、錐形薄殼, 和圓柱形 (非薄) 殼等。其它像地震波傳遞的方程式等等, 相當複雜, 我們無法在此一一敍述。

三. 特徵值問題

我們來看看高維空間的波動方程 (23), 在二維 ($N = 2$) 的情況下, 它是一個振動薄膜的數學模形, 就是圖二音叉實驗的例子。我們現在將時、空二變元分開: $u(x,t) = e^{i\omega t}\phi(x)$ 代入 (23) 中, 得到 (所謂 Helmholtz 方程)

$$\Delta\phi(x)+\omega^2\phi(x) = 0, \quad x = (x_1, x_2) \in \Omega, \qquad (30)$$

此處 Ω 代表薄膜靜止時所佔區域。因薄膜邊緣定位, 故邊界條件為

$$\phi(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad \partial\Omega \text{ 為 } \Omega \text{ 的邊界。} \qquad (31)$$

這樣 (30) 及 (31) 便成為一個特徵值問題: 把所有的 ω 值找出, 使 (30) 及 (31) 具有非零解 $\phi(x)$; $\lambda = \omega^2$ 稱為是特徵值, $\phi(x)$ 是特徵函數, 而 ω 為特徵頻率。

另一方面, 我們看 (25), 若將分離變元寫為 $u(x,t) = e^{-i\omega t}\phi(x)$ 代入, 則得

$$\Delta\phi(x) + \hbar\omega\phi(x) = 0。 \qquad (32)$$

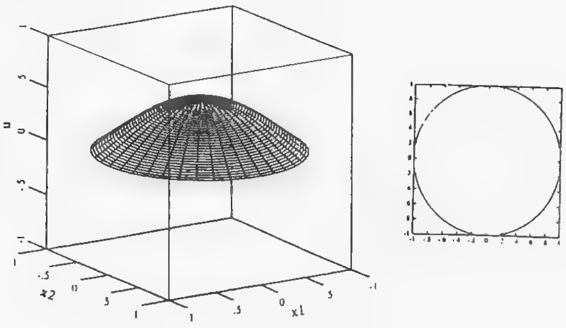
故 (32) 與 (31) 基本類似。因此薛丁格方程式的特徵函數應與波動方程者完全相同, 也即是說它們顯出有「波動」的特性。事實上, 這是誘導薛汀格當年以方程式 (25) 來建立量子力學的數學基礎的主因之一, 因為他從 de Broglie 的物質波實驗, 獲知物質具有波動性之故。在 (32) 中的特徵值 $\hbar\omega$, 稱為是電子的 能階, 而特徵函數 $\phi(x)$ 則對應於電子的分佈狀態。

當 Ω 為單位 (即半徑為1) 圓盤時, 我們可以用極坐標把 (30), (31) 的解決定。它們由低頻往高排, 順序排列如表一所示:

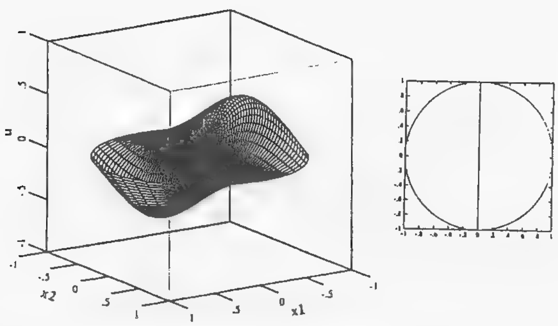
特 徵 函 數	多重性
$J_0(2.4048r)$	1
$J_1(3.8317r)e^{\pm i\theta}$	2
$J_2(5.1356r)e^{\pm i2\theta}$	2
$J_0(5.5201r)$	1
$J_3(6.3802r)e^{\pm i3\theta}$	2
$J_1(7.0156r)e^{\pm i\theta}$	2
$J_4(7.5883r)e^{\pm i4\theta}$	2
$J_2(8.4172r)e^{\pm i2\theta}$	2
$J_0(8.6537r)$	1
$J_5(8.7715r)e^{\pm i5\theta}$	2

表一. 單位圓盤上 Δ 的特徵函數 (邊界條件為零)

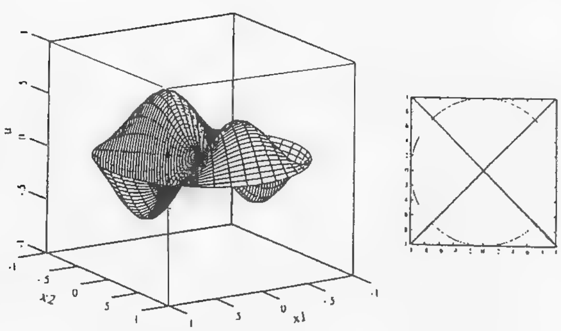
這裡的 J_n 是 n 階的 Bessel 函數、r 為半徑, θ 為角。而多重性、係指對某一頻率, 譬如說 3.8317, 會有兩個不同的特徵函數, 一個是 $J_1(3.8317r)e^{i\theta}$, 而另一為 $J_1(3.8317r)e^{-i\theta}$ 。我們把它們的圖形示於圖四至圖十三中。讀者可將這些圖形右邊的節線圖, 與 H. Helmholtz 所繪的圖三中所示節線相比較。



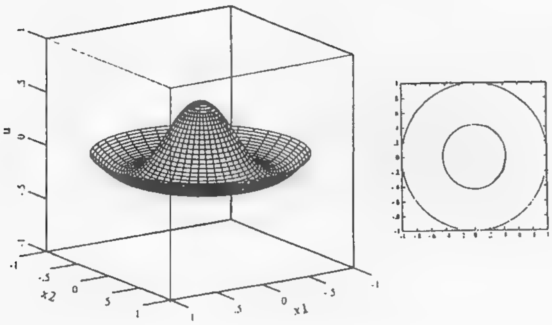
圖四. 圓盤上第一個特徵函數 $J_0(2.4048r)$



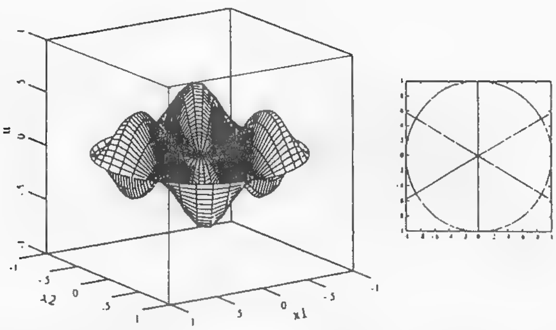
圖五. 圓盤上的第二個特徵函數 $J_1(3.8317r)e^{\pm i\theta}$ 的實部



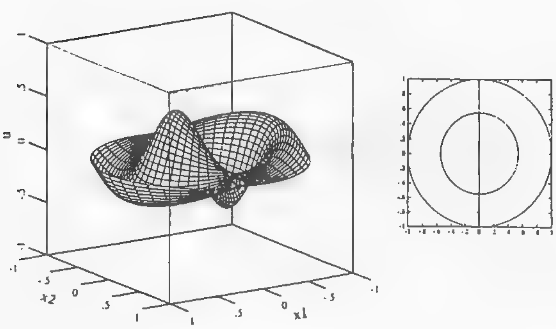
圖六. 圓盤上的第三個特徵函數 $J_2(5.1356r)e^{\pm i2\theta}$ 的實部



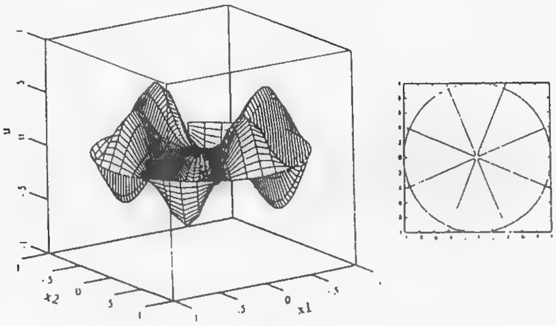
圖七. 圓盤上的第四個特徵函數 $J_0(5.5201r)$



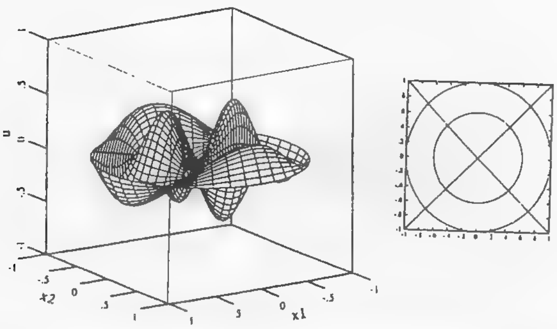
圖八. 圓盤上的第五個特徵函數 $J_3(6.3802r)e^{\pm i3\theta}$ 的實部



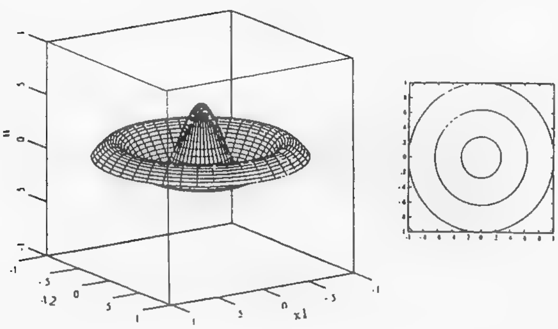
圖九. 圓盤上的第六個特徵函數 $J_1(7.0156r)e^{\pm i\theta}$ 的實部



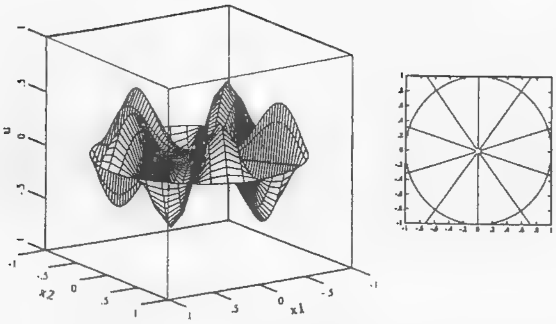
圖十. 圓盤上第七個特徵函數 $J_4(7.5883r)e^{\pm i4\theta}$ 的實部



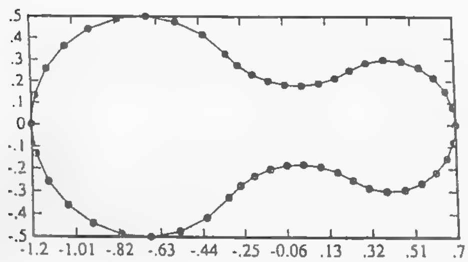
圖十一. 圓盤上第八個特徵函數 $J_2(8.4172r)e^{\pm i2\theta}$ 的實部



圖十二. 圓盤上第九個特徵函數 $J_0(8.6537r)$



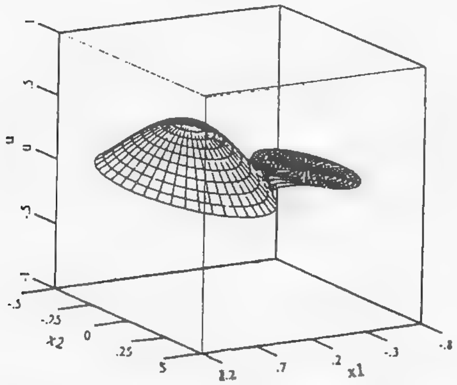
圖十三. 圓盤上第十個特徵函數 $J_5(8.7715r)e^{\pm i5\theta}$ 的實部



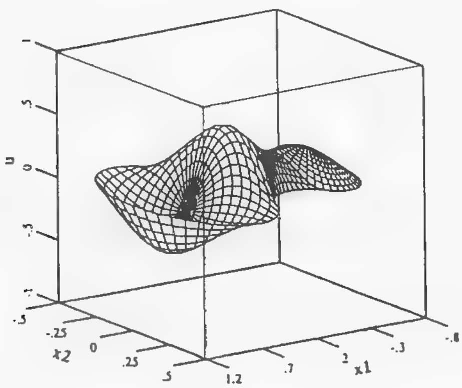
圖十四. 一個小提琴形狀的區域 (邊界分割成50份, 用以進行邊界元 素計算)

i	$\lambda_i = \omega^2$
1	21.0606
2	49.7440
3	55.5648
4	59.2180
5	118.3052
6	155.8094
7	164.3584
8	212.9246
9	214.5384
10	235.7697

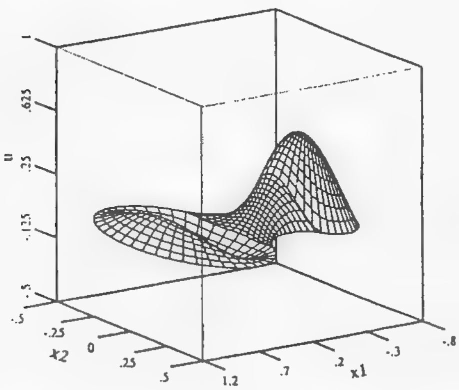
表二. 在小提琴形狀區域上 Δ 的邊界元素計算所 得之特徵值 λ (邊界條件為零)



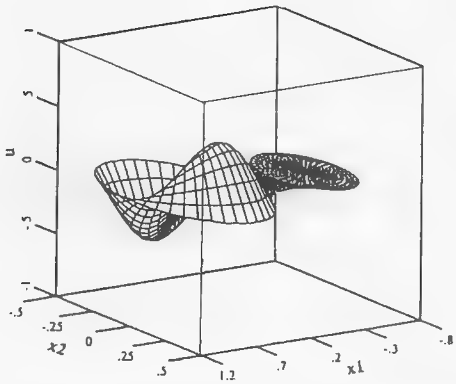
圖十五. 小提琴區域上 Δ 的第一個特徵函數



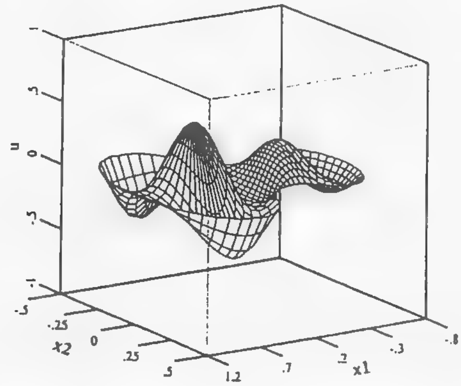
圖十六. 小提琴區域上 Δ 的第二個特徵函數



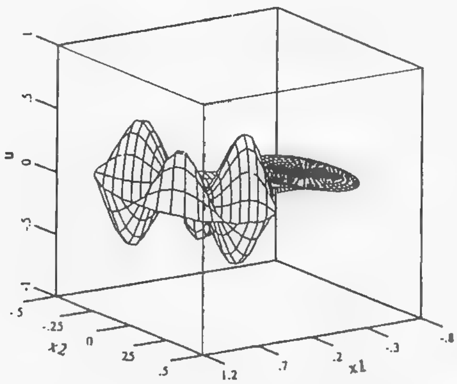
圖十七. 小提琴區域上 Δ 的第三個特徵函數



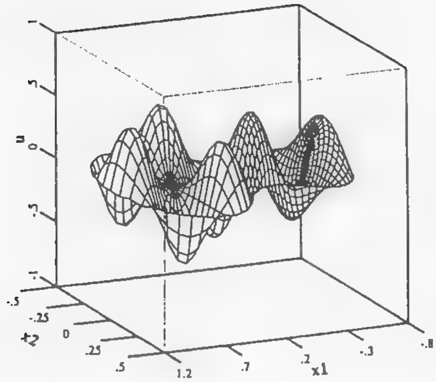
圖十八. 小提琴區域上 Δ 的第四個特徵函數



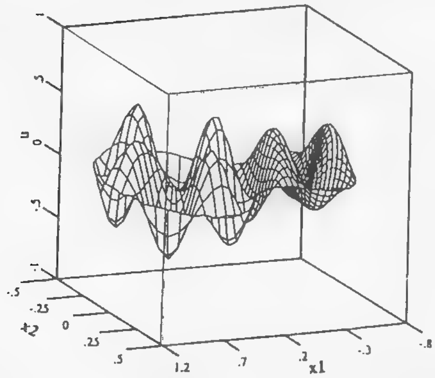
圖十九. 小提琴區域上 Δ 的第五個特徵函數



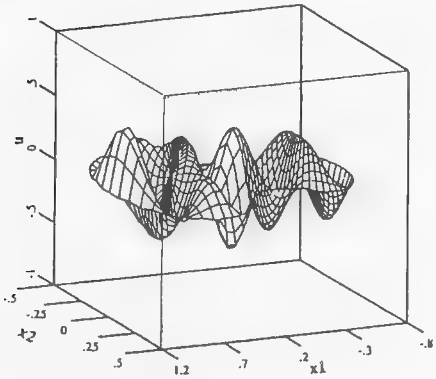
圖二十. 小提琴區域上 Δ 的第六個特徵函數



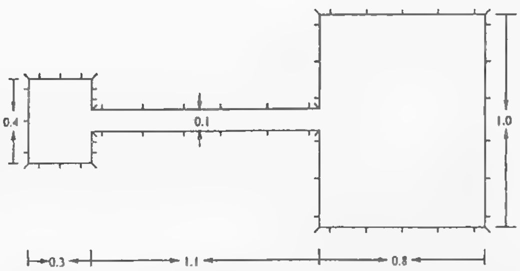
圖二十一. 小提琴區域上 Δ 的第七個特徵函數



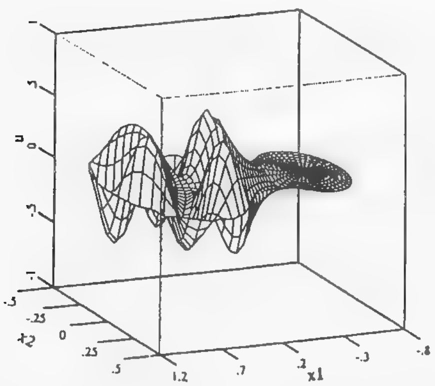
圖二十四. 小提琴區域上 Δ 的第十個特徵函數



圖二十二. 小提琴區域上 Δ 的第八個特徵函數



圖二十五.一個啞鈴形的區域, 其邊界分割爲 59份, 以 行邊界元素法計算



圖二十三. 小提琴區域上 Δ 的第九個特徵函數

i	$\lambda_i = \omega^2$
1	25.0907
2	54.7484
3	70.7229
4	100.5261
5	103.8032
6	146.2646
7	146.6854
8	163.4051
9	172.0753
10	177.0784

表三. 在啞鈴形狀區域上 Δ 的邊界元素計算所得之特徵值 λ (邊界條件爲零)

當 Ω 不是像圓形、矩形、橢圓形等的規則區域時, 則無法把特徵函數用分離變元法完全解出。這時怎麼辦呢? 我們只好依賴解偏微分方程的數值方法, 藉計算機之力求出數値解。數値方法如差分法、有限元素法及邊界元素法等, 基本上均可用, 不過其中以邊界元素法解 (30)、(31) 較好做。這是筆者與同事周建新教授所發展的, 細節請參考我及他合著一書

> G. Chen and J. Zhou, "Boundary Element Methods" Academic Press, London, 1992

中。以下, 我們舉出兩個不規則區域 Ω 的例子、並附其特徵函數經計算得出的圖形、供大家參考。

第一個是像小提琴或胡琴形狀的區域, 見圖十四, 我們在用邊界元素計算的時候, 把邊界的曲線分割成50段。在曲線的曲率較大之處, 分割得稍微密一些。這樣用邊界元素法算下去, 得出了十個特徵頻率 (見表二) 及十個特徵函數圖形 (見圖十五至二十四)。

第二個是像啞鈴形狀的區域, 見圖二十五, 它是由在右邊的一個大房間, 以長廊通到左邊的小房間構造而成。我們在以邊界元素計算的時候, 將邊界分割成59份線段。所得出的10個特徵値, 請見表三中。我們也畫出13個特徵函數的圖形, 請見圖二十六至三十八中。

計算機所繪圖形給我們在研究數學、物理或工程時, 直覺上幫助非常大。譬如說, 我們來看圖四, 十五, 及二十六。這三個圖都是最低頻率的特徵函數, 它們具有什麼樣的共同特點呢? 即是函數値都是正的。這是偏微分方程理論裡的一個基本定理。事實上, 僅有這個特徵函數是具有這個性質的。其他的特徵函數在 Ω 上取値, 必定有正有負。因此, 這個最低頻的特徵函數, 它在振動力學上的意義也就特別要緊, 由於它振動時, 所有點的運動都是同相的, 使它的振幅大, 破壞力高的緣故。

我們再來看次低頻的特徵函數, 見圖五、十六及二十七。這三圖具有任何共同特性嗎? 是的, 它們都只有一條節線:

1. 這條節線的兩端點都在 $\partial\Omega$ 上。(請比較圖七。它也僅有一 條節線, 可是那節線是條封閉曲線, 沒有端點。)
2. 這條節線把 Ω 分成兩部份, 一邊特徵函數的値是正的, 另一邊是負的。

以上這兩個性質, 我們是否也可以數學嚴格證明? 迄今爲止, 很多名數學家嘗試過, 可是都沒有做出來。這是偏微分方程裡的一個有名的未解決的問題, 稱爲節線臆測 (The nodal line conjecture)。當然, 你要是做出來的話, 在數學上就有了一個可以長久留名的貢獻。

我們本節裡的剩下篇幅, 來討論一下圖二十六至三十八裡顯示的特徵函數。我們可以把波動方程 (23) 想像成在啞鈴區 (圖二十五) 中傳遞的聲波, 因爲聲波的運動是滿足波動方程的。

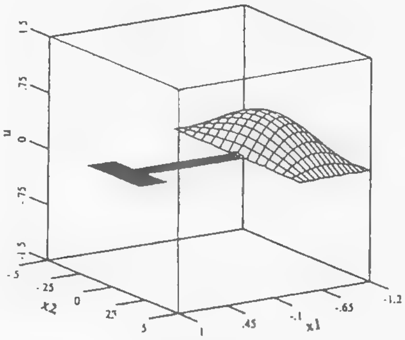
在頭幾個低頻率的特徵函數裡, 見圖二十六至三十二, 我們可以看到聲波的振動或傳遞均限於右邊的大房間內。在走廊上及

小房間內，一點振動都看不出。在那些地方的振動完全爲零嗎？ 不然，事實上在那裡仍有極小的振動。只是振動量微乎其微(譬如說，與右邊大房間其量之比，爲1 : 10^4)，在圖形上完全看不出來罷了。這種現象，在量子力學上也有它的特殊意義，稱爲是隧道現象(tunneling)，在表面物理 (surface physics) 及電子顯微鏡的設計上很要緊。(見前段方程式 (30) 至 (32) 中說明, 因薛汀格與波動方程之特徵函數是相同的。)

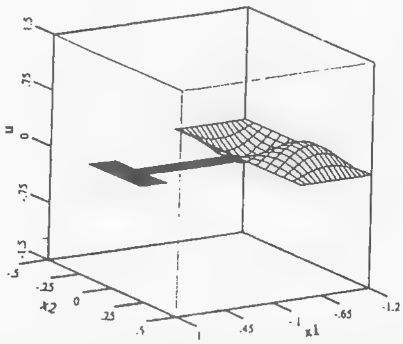
直到了第八低的頻率，見圖三十三，我們才見到小房間開始振動，然而走廊上及大房間幾乎是靜止的；與第二十六至三十二圖成明顯的對比。我們稱這種現象爲 個別振動現象(separate vibration)。

我們在此順便提一下偏微分方程理論中有名的 Holmgren 定理。這定理很粗淺的敍述如下。假設 Ω 爲一連通區域，而 u 爲 Ω 上某線性偏微分方程的解。若 u 在 Ω 的子區域 Ω_1 上恆等於零，則 u 在整個區域 Ω 上恆等於零 * 。根據 Holmgren 的定理，我們可知在圖二十六至三十二中，即使在圖形中極平坦的部份，解也不應爲零，只是微乎其微罷了。

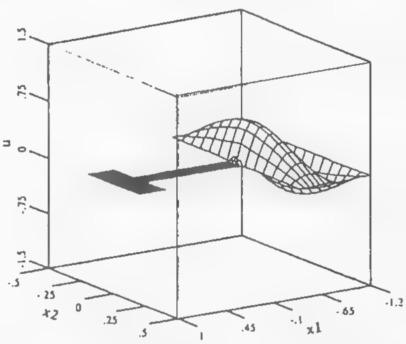
在圖二十六至三十三中，個別振動現象發生的主要原因，係由於在大、小房間產生的振動波，其波長超過走廊的寬度，以致被走廊卡住，不得通過。(這種現象，可以明顯地在走廊口上觀察到。) 到了頻率增高，波長縮短時，我們開始見到了波逐漸透過走廊，傳遞起來。見圖三十六至圖三十八。當然，我們可以推想到更高的頻率，大小房間的振動波都可穿過走廊互相傳遞，不會再有個別振動現象出現。



圖二十六. 啞鈴區域上 Δ 的第一個特徵函數

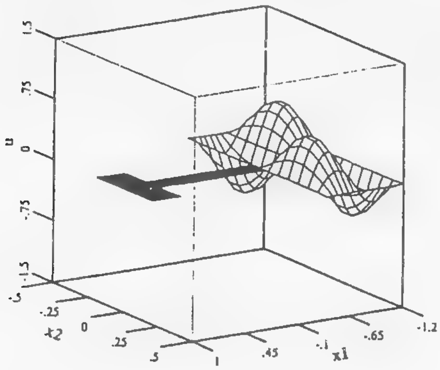


圖二十七. 啞鈴區域上 Δ 的第二個特徵函數

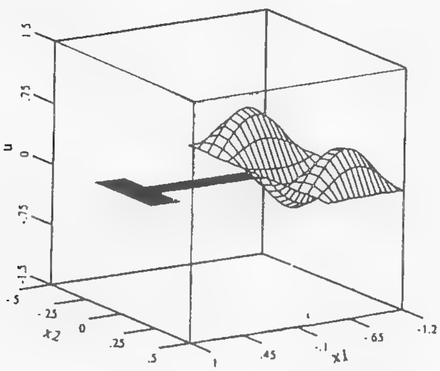


圖二十八. 啞鈴區域上 Δ 的第三個特徵函數 (請注意橫向波試圖通過走廊，但因波長太大，被廊口扼住。)

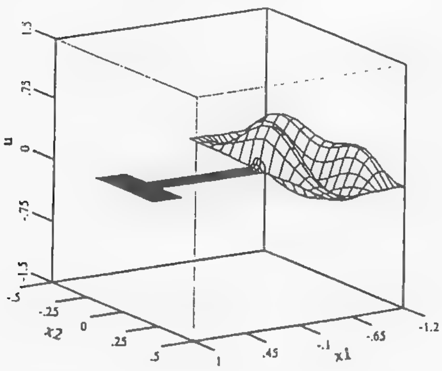
*這定理成立的條件，事實上還需要 $\partial\Omega$ 及這偏微分方程的係數無限「光滑」。僅此略提。



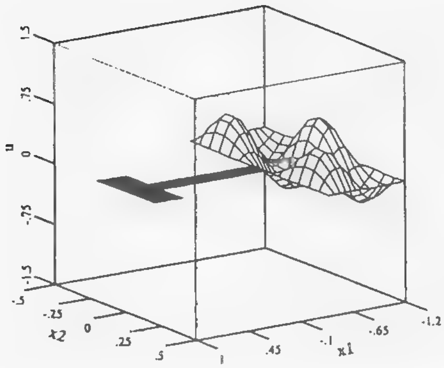
圖二十九. 啞鈴區域上 Δ 的第四個特徵函數



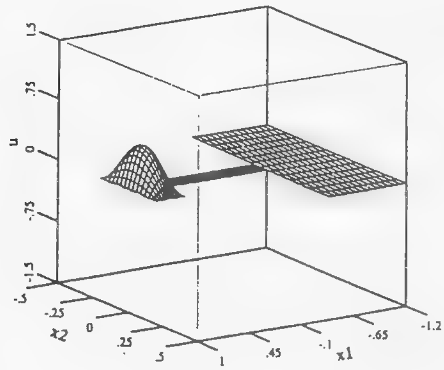
圖三十. 啞鈴區域上 Δ 的第五個特徵函數



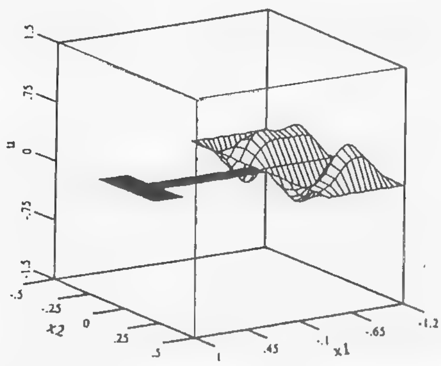
圖三十一. 啞鈴區域上 Δ 的第六個特徵函數



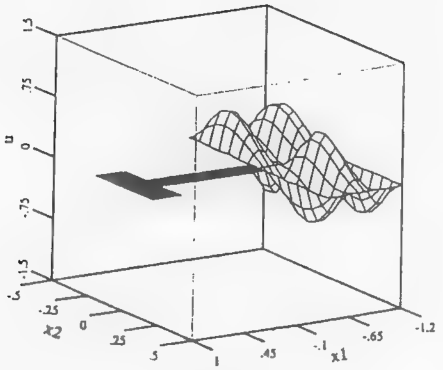
圖三十二. 啞鈴區域上 Δ 的第七個特徵函數



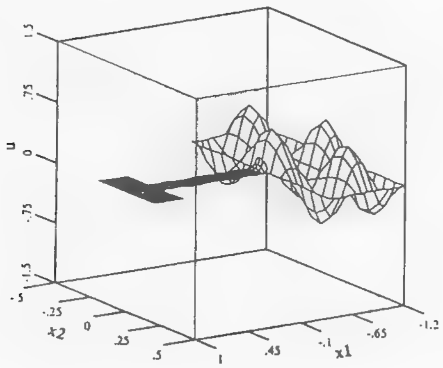
圖三十三. 啞鈴區域上 Δ 的第八個特徵函數。左邊小間首次開始有顯著的振動。



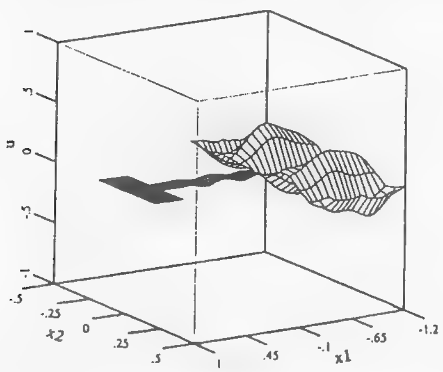
圖三十四. 啞鈴區域上 Δ 的第九個特徵函數



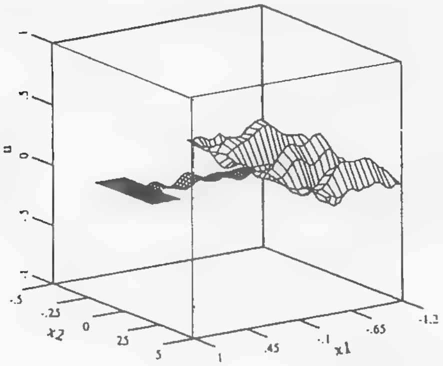
圖三十五. 啞鈴區域上 Δ 的第十個特徵函數



圖三十六. 啞鈴區域上 Δ 的第十一個特徵函數請注意, 可看到走廊上有輕微的波動。



圖三十七. 啞鈴區域上 Δ 的第十二個特徵函數。這時可見走廊上波動更爲明顯。



圖三十八. 這是一個較高頻率的特徵函數(其順序不詳)。此時可見走廊上所振動之幅度甚大。

四. 具有物理意義的異常形狀特徵函數

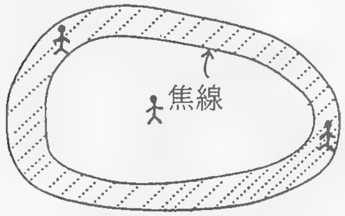
英國名數學物理學家瑞雷爵士 (Lord Rayleigh) 在 1910 年研究圓形區域上聲波傳遞的時候, 發現了一個有趣的現象: 在某些高頻率時, 聲波好像是繞著圓周傳播, 有如一個球沿著圓周滾動一樣。因此, 你若靠著牆邊 (以該頻率) 細語, 你的朋友在房間的另一頭, 耳朵靠著牆可以聽到你講的話, 而站在房子中間的朋友卻聽不到你講的話。瑞雷爵士稱呼這種現象爲沿牆細語波(whispering gallery mode)。

到了 1960 年, 美國名應用數學家凱勒 (J.B. Keller) 及同事 Rubinow 研究波動方程的特徵函數時, 發現瑞雷爵士所提的沿牆細語波, 不但對圓形區域成立, 在任何 (無角的) 凸形區域上也有。見圖三十九所示。凱勒他們又發現了, 在凸域上, 還有另外一種波, 它好像是一個球, 沿著凸域上最短徑向的附

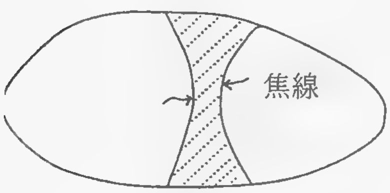
近, 來回反彈運動, 如圖四十所示。他們稱這種波爲 彈球波(bouncing ball mode)。

沿牆細語波及彈球波這兩種波, 不但顯出波動性質, 同時也具有質點的性質, 因爲它們好像顯現一個球在滾動或者反彈。這樣看來, 它們不是具有了波動及質點的雙重特性, 與量子力學中的 物質波動雙重性(matter-wave dualism) 相合嗎?

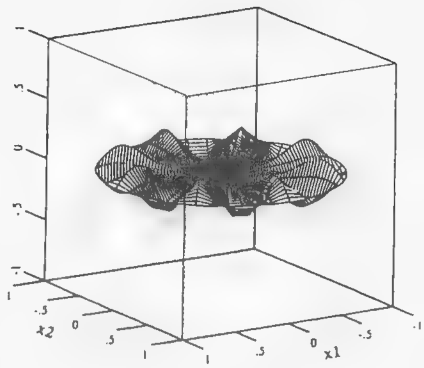
筆者與同事周建新教授研究波動方程的特徵函數時, 實際觀測到瑞雷及凱勒等人所提到的上述兩種波動現象。現把它們分別附在圖四十一及圖四十二中, 以嚮讀者。同時, 我們也觀測到所謂波的焦聚現象 (focusing), 即有如凸面鏡那種聚光性。在圓上, 見圖四十三中, 大家可見到該特徵函數顯現出波動在圓心附近形成高峰, 其強度爲他處的數倍。圓心即是焦點, 而我們稱呼這種波爲焦聚波 (focusing mode)。



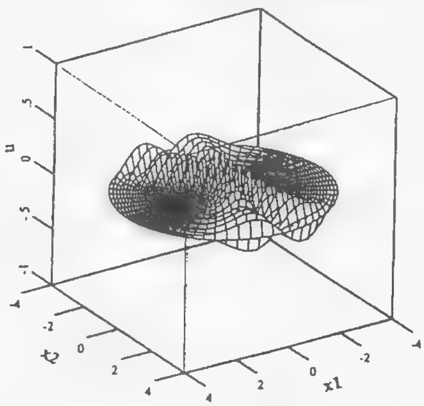
圖三十九. 沿牆細語波繞邊而傳播, 靠牆的兩人可以聽得見, 而房中間的人卻聽不見



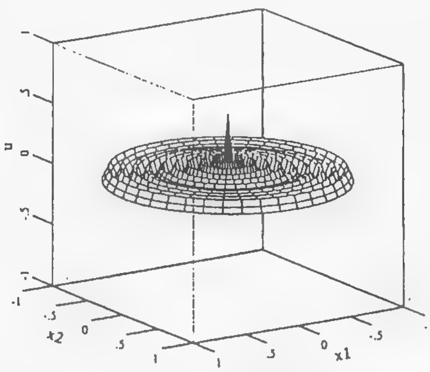
圖四十. 彈球波的傳播, 好像一個球沿著短徑向, 來回反彈



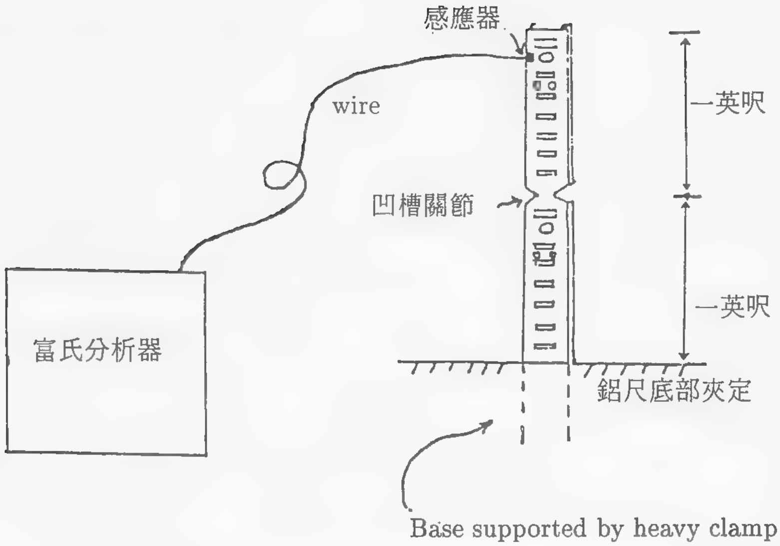
圖四十一. 這是 Δ 在圓盤上的一個特徵函數 $J_8(12.2251r)\cos 8\theta$ (零邊界條件)。它是一個沿牆細語波的實例。



圖四十二. 這是 Δ 在橢圓上的一個特徵函數 (零邊界條件)。它是彈球波的實例



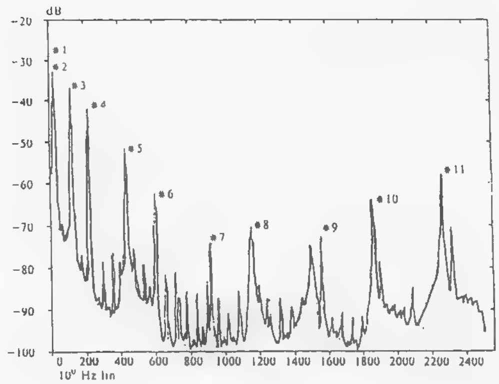
圖四十三. 這是 Δ 在圓盤上的一個特徵函數 可見其中心高度比他處高出數倍。這是焦距波的實例



圖四十四. 在凹槽關節的鋁 (振動樑) 振動實驗裝置

五. 一個振動樑的實驗

爲了瞭解一些實際的振動現象, 讓我們來看看一個振動的實驗及測量 *。取一根鋁尺, 在中點附近挖下凹槽。把鋁尺的一頭穩穩的夾定桌邊, 另一頭上附了一個很小的感應器 (sensor), 它基本上是個應變測量儀 (strain gauge); 振動的信號, 由感應器測出, 通過電線, 輸入富氏分析析器 (Fourier analyzer)。見圖四十四。在富氏分析器內, 計算機施以快速富氏變換 (fast Fourier transform), 可把振動訊號, 轉換爲富里哀級數, 即可把所謂光譜 (spectrum), 也就是特徵頻率顯示出來。見表四。



圖四十五. 在凹槽鋁尺振動的功率光譜

圖四十五所示的即是鋁尺的功率光譜 (power spectrum): 振幅大的, 所顯示的譜點位置較高。我們從圖四十五中, 可見到算出的頭十一、二個頻率, 分別以數字標出。它們的值, 見表四。以赫茲 (Hertz) 爲單位。

*取材自筆者與 S.G. Krantz, D.L. Russell, C.E. Wayne, H.H. West 及 M.P. Coloman 合著一文中, 見下詳。

1	5	25	
2	30		75
3	125	100	
4	225		70
5	435	170	
6	605		75
7	910	245	
8	1150		75
9	1540	390	
10	1860		70
11	2275	320	
12	2665		

表四. 鋁尺的頭十二個特徵率 (由圖四十五量出)

在表四中, 左邊第二行所列的特徵頻率, 顯不出什麼規則性。可是我們把這些值, 兩兩差分, 得到左邊第三行的值。然後再差分一次, 即得表四右邊第一行之值, 近於常數。這與理論 * 上的估計是相合的。這理論上所用的偏微分方程的數學模型, 即是振動樑方程式 (24), 由十八世紀的兩位大數學家歐拉 (Euler) 及貝努里 (Bernoulli) 提出的。

在做實驗中, 我們必須要把感應器稍微調整幾次位置, 然後再把所測之頻率值相加平均起來, 才能得到較正確的結果。這樣做的目的, 是要避免感應器的位置正好放在節點上。因節點是不動的, 這樣就會錯過了一些重要訊息。

大家也可看出, 在圖四十五中, 有許多尖點的頻率沒有歸入表四中。這是因為這些尖點所對應的, 不是樑的垂直運動, 而是扭轉 (torsion) 運動。其振幅較垂直運動小, 且不包含在樑方程式 (24) 的數學模型中, 故不討論。

當頻率愈高時, 牽涉到的測量雜音干擾愈大。像圖四十四中所示實驗做於1987年, 當時用最先進的富氏分析器及感應器, 僅可測出十幾個特徵頻率。近幾年, 在精密儀器的發展上, 有了長足的進展。Strain gauge 已由雷射振定儀 (laser vibrometer) 取代。不過這種新儀器很敏感, 操作及實驗狀況控制就複雜多了。特徵函數的圖形, 一部份也可由干涉儀 (interferometer) 測定畫出。不過畫特徵函數, 最好的辦法還是用數值方法, 如筆者在第三節所示。因此, 現代的工程學者, 經常要設下數學模型, 以便用數值方法及電腦來達成研究。總之, 新的方法及儀器日新月異, 與 Helmholtz 在第二節所提1885年書中敘述的音叉實驗, 有天壤之別了。

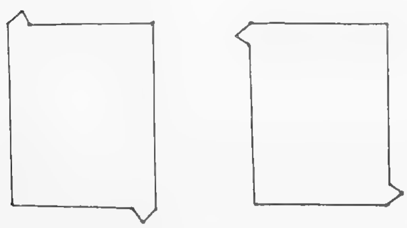
六. 繼續談一些數學問題

我們再繼續談一些與振動有關的數學理論上問題。我們在本文第二、三兩節所提到的特徵值與特徵函數的問題, 是所謂的正問題(direct problem), 即給了一個區域 Ω , 試決定拉普拉斯算子 Δ 在其上的特徵值及特徵函數。我們現在來考慮一個反問題 (inverse problem), 譬如說, 我們若已經知道

* 見筆者與 S.G. Krantz, D.L. Russell, C.E. Wayne, H.H. West 及 M.P. Coleman 合著之文「Analysis, designs and behavior of dissipative joints for coupled beams」, SIAM J. Appl. Math. 49(1989), 1665–1693。

Δ 的全部特徵值, 那麼我們是否可以決定區域 Ω 的大小形狀? 另外一個不同的說法: 若有兩個區域 Ω_1 和 Ω_2 ，具有完全相同的特徵頻率。那麼 Ω_1 和 Ω_2 具否也完全一樣? 這個問題、是由美國名數學家 Mark Kac 在 1966 所提出來的: 「我們是否可聽出鼓的形狀?」(Can we hear the shape of the drum?)

大小鼓都打, 大鼓聲音低沈, 即最低特徵頻率值較小, 故可立即分辨何是大鼓, 何是小鼓。可是要是鼓形不規則的時候, 就很難講了。上段所提的問題, 一直沒有解決。但在 1992年, 有三位數學家 * 發表一文, 說是若 Ω 是多邊形的話, 以上的問題答案是否定的, 他們造出了一個反例, 見圖四十六所示。但當 Ω 的邊界是光滑的話, 他們的數學方法就不適用。這問題仍無解決。



圖四十六. 兩個多邊形區域, 不相同, 而特徵頻率卻全部相等

我們現在列出幾個基本的數學式子給大家看。我們將 Δ 的特徵值, 由小到大, 一一排列下來, $\lambda_1 \le \lambda_2 \le \lambda_3 \le \cdots \le \lambda_n \le \cdots$, 則可得

$$\lim_{\lambda\to\infty} \frac{\text{小於}\lambda\text{的特徵值數目}}{\lambda} = \frac{\Omega\text{的面積}}{4\pi}, \tag{33}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n t} \ \underset{\sim}{\text{漸近於}}\ \frac{\Omega\text{的面積}}{4\pi t} - \frac{L}{8}\sqrt{\frac{1}{\pi t}} + \frac{1}{6}(1-r), \tag{34}$$

這裡 L 表示 Ω 週邊的長度, r 表示 Ω 中所含的洞的數目。第一個式子係由荷蘭名物理學家 Lorentz (也就是首先研究相對論的人) 在研究黑體輻射時, 由物理現象推出。他在一次去德國哥廷根 (Göttingen) 大學演講時提出。當時本世紀最偉大學數學家之一希爾伯特 (Hilbert) 在座, 認爲此一問題太難, 恐怕五十年內都無法做出來。但在1913年的時候, 希爾伯特的門生 H. Weyl 把 (33) 完全證出。Weyl 也因此嶄露頭角, 終成爲大數學家。

在 (34) 的右邊漸近展開式, 頭兩項已證明無誤, 但第三項迄今尚無人證出。由 (33) 及 (34)(的右邊前兩項), 我們可以推出, 若有一區域 Ω, 它的特徵頻率與圓盤的特徵頻率完全相同的話, 那麼 Ω 也一定是圓的。可是其它的形狀下, 就不敢保證了。譬如說, 在 1964年, 美國數學家 Milnor 造出兩個16維空間的圓環體 (Tori), 使得它們的拓樸結構不同, 但是它們的特徵頻率確是完全相同的。

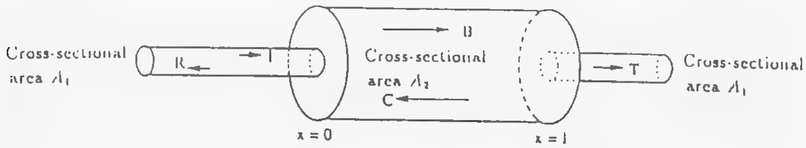
* 見 C. Gordon, D. Webb and S. Wolpert: 「Isospectral plane domains and surfaces via Riemannian orbifolds」, Inventiones Math. 110(1992), 1–22.

七. 振動力學的一些應用

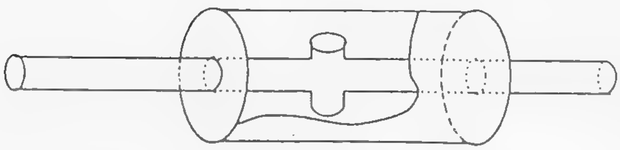
末了, 我們舉幾個振動力學應用的例子。

(1) 減音器

汽車或摩托車排氣管的減音器原理, 就是利用聲波重疊中和的原理而製。見圖四十七。在排氣管上, 我們加入一段粗大的部份, 當汽車馬達音波傳播到此時, 一部份會繼續向下游透射 (即 T), 另一部份則被反射 (即 R)。透射波與反射波相重疊, 因為相位角不同, 使振幅降低, 故造成噪音衰減。但這種作法, 對某些頻率噪音有效, 對其他則無效, 故其效果不是最好的。



圖四十七. 最簡單的排氣管減音器



圖四十八. Helmholtz 共振腔減音器

有一個改進的辦法, 是在排氣管上挖幾個大小不同的孔, 外面加一段封閉的粗管罩住, 如圖四十八所示。這些開口形成共振腔, 有如圖二音叉實驗效果一樣, 對某些頻率的音波 (即引擎噪音) 產生共振, 能量由空氣分子振動的音波能量, 轉化為減音器的振動, 變成熱能耗散。這樣消滅的噪音頻帶較寬, 效果更佳。

(2) 隱形飛機及潛艇

偵測飛機及潛艇, 主要靠雷達 (電磁波) 及聲納 (音波)。因此, 若能減少飛機或潛艇對電磁波或音波的反射, 則不易被雷達或聲納所測尋。現代新的隱形飛機或潛艇的設計, 係根據兩種原理, 一為減少散射截面積 (scattering cross section), 譬如將機身及機翼合起來設計得很扁平, 因此總反射面積減少, 使反射波大量降低。另一辦法為將機身及機翼尖銳的邊緣處, 磨得光滑, 這樣也會有減少反射的效果。對於潛艇, 在外殼上, 還可塗好幾層吸音漆, 以吸收聲納發出的音波。

現代美國隱形飛機製造的技術, 已可達到這個地步: 當你在雷達銀幕上偵測到飛機來

襲時, 飛機已經飛到你的頭頂投彈了。

(3) 超高級摩天大樓

我們可以把摩天大樓簡化想像爲滿足像方程式 (24) 那樣的振動樑。當大樓愈高時, 就好像樑愈長, 它的最低共振頻率值就愈小, 因此就容易受到地震波、強風等的影響, 引起共振, 使大樓有遭摧毀之虞。當然, 有一個基本的辦法, 就是把大樓蓋得基底寬大而堅厚, 增加安全係數。可能的缺點是成本太高, 而且不易有流線形吸引人的外貌。

現代的土木工程師、力學及應用數學家已有一些辦法將振動力學的理論, 配合偏微分方程的控制理論,設計出一些像 TMD (Tendon Mass Damper) 的阻泥器, 使超高摩天大樓在地震的防害上, 達到很好的效果。使建築物裡的感應器, 一偵測到地波震波來襲, 即可自動控制, 將大振幅的頻率波有效衰減。

在這一方面的研究, 現仍不斷的進行中。大家可由 1995 年初日本神戶大地震所摧毀的恐怖性, 知道在這方面研究的重要性。

本文所附的圖形, 大部份係由筆者與周建新教授合著書 (上、下册) 中取用:

G. Chen and J. Zhou,"Vibration and Damping in Distributed Systems, Vol. 1: Analysis, Estimation, Attenuation, and Design", CRC Press, Boca Raton, Florida, 1993;

" ··· , Vol. 2: WKB and Wave Methods, Visualization and Experimentation", CRC Press, Boca Raton, Florida, 1993.

—本文作者任教於美國 Texas A&M University 數學系—

淺談「囚徒困局」現象的應用

李國偉

如果你去問一些數學家, 數學是在作什麼? 大部份可能會回答, 數學是處理形與數的學問, 它的組織方式包括了定義、定理、證明這些東西。但是人類有關數學性的活動, 不僅僅是純數學家關心研究的那些題材, 而是更廣泛的會與人類文化及生活息息相關。所以在一般我們認爲可以產生數學問題的物理、化學題材外, 一些人生現實、文化、社會的現象裡, 也不是完全沒有數學的蹤影, 端看我們如何用數學的工具來捕捉描述這些現象而已。例如: 當我們在高速公路塞車的時候, 如果大家都規規矩矩的排在車道內, 而有一個人違規行駛路肩, 那他必定會佔到便宜。但是如果每個人都有相同的想法, 也都付諸行動的話, 則情況必然更爲惡化, 人人都沒有便宜可佔。這種情形其實經常出現在我們的生活裡, 就是如果每個人守規矩做事, 那麼第一個不守規矩的人會討到便宜; 但是如果每個人都不守規矩的話, 後果反而對人人均不利。這個現象的背後是否隱藏某些數學的訊息? 爲什麼我們要如此問呢? 因爲當一件事反覆的在各處發生時, 它背後就很可能有某種結構存在; 而當這種特殊結構存在時, 我們就有可能用數學工具把它形式化, 再加以分析。講題裡所謂的「囚徒困局」就是一個這種類型的例子。

我們先來舉個例子說明爲什麼叫「囚徒困局」: 假使你和你的朋友作了一些於法不容的事, 結果被警察逮到關了起來。這時進來一位檢察官, 他對你說如果你乖乖認罪, 幫警方指證你的朋友的話, 你將可獲無罪開釋。如果你不招, 而你的朋友招供的話, 你將會被判五年牢獄。假使你們兩個人都不招的話, 因爲還有相當的證據在警方手中, 足夠判你們兩個人每人兩年。如果你們兩個分別都招供了, 因爲證據確鑿, 對不起, 每人都得坐四年牢。這樣的條件另一位檢察官正在跟你的朋友說明, 請問在這種局面下, 你是招也不招?

現在我們把這個問題分析一下, 首先將這些利害關係製成一張表。其中的數字對, 左邊數字的絕對值表示你的坐牢年數, 右邊數字的絕對值表示你朋友的坐牢年數。因爲坐牢總是件倒楣事, 所以用負數代表滿意的程度, 因此負得越多處罰得越厲害。

你的朋友 你自己	不　招	招
不　招	−2, −2	−5, 0
招	0, −5	−4, −4

讓我們來分析一下, 如果你的朋友招了, 你若不招會關五年, 你若招了會關四年, 所以招供對你有利。倘若你的朋友不招, 你若不招會關二年, 你若招了就可以撒鴨子跑了, 當然還是招供對你有利。總而言之, 無論你的朋友招還是不招, 你都會發現招供對你比較有利。你的朋友應該不比你更笨, 相同的邏輯思考, 也會使他選擇招供, 於是你們就哥倆好的到牢裡四年。如果你們別那麼邏輯, 但是有決不出賣朋友的江湖義氣, 兩人都死不招認, 反倒可以只關二年。這種「困局」是該歸咎於理性的邏輯嗎?

我們再舉一個例子, 假使你要跟一位鑽石商作交易, 但是因爲某種不方便的理由, 你們不能面對面做生意。你們約好分別把貨款與鑽石放在指定的地方, 再各自去拿自己的目的物。在這種秘密的交易裡, 誠信變成非常的重要, 否則豈不陪了夫人又折兵? 不過誰不是先照顧自己的利益呢? 倘若你放一袋廢紙, 而不是一袋鈔票, 對方如果也耍詐, 你至少不會損失; 對方如果老老實實放了一袋鑽石, 那你就大賺了一票。因此不論你的對手如何行動, 你都是耍詐比較有利。同樣這套邏輯, 你的對手也不是不會理解, 所以他也決定耍詐, 結果你們兩個誰也沒佔到什麼便宜, 倒不如開始就誠實的交易, 還彼此都能得到想得的東西。這種狀況我們也可用一張表來展示各人的滿意程度。

	合　作	耍　詐
合　作	2, 2	−1, 4
耍　詐	4, −1	0, 0

這張表與前面那張結構其實是一樣的, 如果我們把第一張表的每一個數加4, 就得到第二張表。我們可以更一般性的觀察下列的表:

	C	D
C	R, R	L, T
D	T, L	P, P

其中 C 表示合作 (cooperation), D 表示耍詐 (defection)。R、T、L、P 是一些數値, 分別表示報酬 (reward)、誘惑 (temptation)、損失 (loss)、懲罰 (punishment)。這些數值要滿足兩個條件: (1) $(T+L)/2<R$; (2) $T>R>P>L$。第一個條件的作用使得你們不值得約好, 彼此交替著一次合作一次耍詐, 因爲那樣不會比老老實實合作好。第二個條件才是關鍵, 只要它成立, 我們前面的推論方法都可以行得通, 也就會帶入一種「囚徒困局」裡。

在以下的討論中, 我們固定一張會導致「囚徒困局」的表。如果交易只進行一次, 無論如何還是耍詐比較不會損失。但是如果雙方確實有必要進行一連串的交易, 事先並不知道何時會終了, 那麼又該採取怎麼樣的交易策略呢? 當然我們討論策略時, 並不需要背負道德的包袱, 也就是說交易的雙方都是絕對的以自我爲中心。譬如交易進行若干次

之後, 如果你有可靠的消息說對方已經病重, 下次是他最後一次交易, 那你會毫不猶豫的拿一袋廢紙去。

當然, 策略有很多種, 而且策略的好壞要看你是跟什麼樣的對手交易。譬如對方是一個永遠耍詐的人, 那你只好毫不猶豫的跟他耍詐下去。如果你的對手是一位報復性強的人, 也就是他首先會與你合作, 一直等到你耍一次詐, 他就跟你沒完沒了的耍詐下去。對付這種人, 你應該先跟他合作, 等你賺得差不多了, 就詐他一次、吃他一票。自此之後, 就陪他耍詐, 保持不吃虧的情況。既然沒有永遠居優勢的策略, 該如何決定合作還是耍詐, 便成為一個有趣的問題。

1979 年美國密西根大學政治系教授 Robert Axelrod 作了一項研究, 他找了十四位在對策論 (game theory) 發表過論文的教授, 告訴他們要針對「囚徒困局」來一次策略的大競賽。也就是請他們各自送來一個策略的電腦程式, 然後彼此捉對兒廝殺, 每個人的目標是要攫取最多的分數。每一個參賽者的程式, 對於對手的 C 或 D, 可以回應以 C 或 D, 而且能記憶住跟他交鋒的全部歷史, 回應的辦法也允許採取隨機的方式。事實上在送進來的十四個程式之外,Axelrod 加了一個完全採用隨機步驟的程式叫 RANDOM。在這些送進來的策略中, 有的只要兩行 BASIC 指令就寫完了, 也有的用了六、七十行。每一個程式都要跟其他任一個程式 (還包括一個自己的複製品) 廝殺兩百回合。結果出人意料的, 兩行的程式居然能獲得極高的分數。這是由資深對策論教授 Anatol Rapoport 所提出的, 他的辦法是第一步一定合作, 之後作對手前一步作的動作。這個策略可名為 TIT FOR TAT(以牙還牙)。

有一位名叫 Johann Joss 的人, 他的策略與 TIT FOR TAT 非常相似, 只是有十分之一的機會他會在對手合作過後, 突然耍一次詐。如果把 JOSS 與 TIT FOR TAT配對比賽, 如表所列:

TIT FOR TAT	JOSS	
C	C	
C	C	
C	C	
.	.	
.	.	
.	.	
C	C	
C	D	← 1/10次的耍詐
D	C	
C	D	
.	.	
.	.	
.	.	
C	D	
D	D	← 1/10次的耍詐
D	D	
.	.	
.	.	
.	.	

一開頭兩者都採取合作的態勢, 但 JOSS 的方法會有十分之一耍詐的機會。於是到了某一次交易, 突然 JOSS 耍了一次

詐, 使得兩邊本來合作的態勢打破, 而形成 CD,DC,CD,$\cdots$ 的交易關係。過了一陣, 因爲 JOSS 十分之一機會的耍詐, 再一次的 D, 便使得兩邊交易關係完全陷入相互耍詐的死胡同。JOSS這種方法在與各種不同的對手比賽時, 因爲他會不期然的突襲對方, 往往導致像與 TIT FOR TAT 對陣時互信的瓦解。所以長期累積下來, JOSS所獲得的點數就比不過 TIT FOR TAT。

在這一輪策略大賽中, 像上面的例子提供了特別值得深思的課題。Axelrod 總結整個賽局的經驗說:

> 「從這場競賽裡獲得一項啓示, 就是在各種力量競爭的環境中, 如何降低回音效應是非常重要的。策略分析的高手必須深入三個層次: 第一層是動作的直接反應, 此項最爲明顯, 因爲耍詐一定贏過合作。第二層是間接的效應, 也就是考慮對手會不會懲罰你耍的詐, 絕大部份的參賽者都考慮了這一層。但是第三層要考慮在回應對手的耍詐中, 有可能重複或擴大自己前面想佔人便宜的動作。因此以直接效應而言, 耍一次詐可能有利, 甚至把二次效應考慮進去也顯現不出弱點。眞正的代價或許要在第三層效應時才付出, 使得一次孤立的耍詐動作, 因爲回音效應而陷入彼此互懲的漩渦。參賽的好些策略沒有體會到這種長期影響, 結果變成自己在懲罰自己, 對手的作用只是使這種自我懲罰延遲幾步而已。··· 從分析策略賽局中, 我們可以獲得不少啓示, 知道應該如何去因應勢力競爭的環境。即使研究策略的專家, 包括政治學、社會學、經濟學、心理學、數學的專家, 也往往犯了過分強勢的錯誤, 寬容心不夠, 也太不相信對方善意的回應。」

Axelrod 認爲第一次競賽已經提供了足夠深思的議題, 因此不妨來一次更大規模的競賽, 看看大家能不能由第一次的教訓中, 謀求更大的改進。於是他除了邀請第一次的參賽者外, 更在電腦或賽局的專門雜誌上登廣告徵求競賽者。參賽的人都被告知第一次競賽的經驗教訓, 而且如果有人以爲第一次的十四個策略中哪一個最爲有利, 也可以用那個策略參賽。結果有六十多個參賽者, 有趣的是只有 Rapoport 自己再送入 TIT FOR TAT。

經過一場捉對大廝殺後, 原本在前一輪中得分較高的那些策略方法, 幾乎全都遭遇悽慘。唯獨 TIT FOR TAT 仍然高居領先地位, 表面上看起來令人費解的是, 當 TIT FOR TAT 與別人對壘時, 頂多處於不吃虧的狀況, 絕不會超越它的對手。但是從長期總體的效應來看, 它卻能得到最高的分數。Axelrod檢討了排名在前的策略的特長, 歸納出下面幾個要素:

1. 絕不會主動先耍詐。

2. 不會對人家的善意回應毫無回饋, 也就是說當對方耍了你一次詐之後, 又再度對你作善意回應時, 你不會因爲舊恨而跟他糾纏下去, 你會用寬容的態度 還以善意的回應。
3. 但是對人家的耍詐行動, 你會毫不遲疑的立即加以反擊。

第二次競賽更進一步啓發 Axelrod 可以用類似的方法作一次生態環境的模擬。開始時的參賽策略可以想像是一群原始的生命體, 經過一輪競賽後, 得分多的策略在下一輪中可以用較多的份數參賽。這種設計的意義是模擬演化過程裡, 較適者可以有較多的後代。

這種生態賽局經過上千輪的實驗後, 也有一些有趣的現象浮現。在前面說明的第二次競賽中, 也有一些經常主動耍詐攻擊人的策略, 會獲得相當高的分數。這些策略在生態賽局中的前兩百輪, 取得相當大的優勢, 數量很可觀的增加, 因爲這個段落裡比較軟弱的策略被他吃定了。但是隨著弱肉被強食之後, 剩下的還有大量的像 TIT FOR TAT 的策略, 就不再有便宜可佔了。等到一千五百輪之後, 這些窮凶惡極的生物終於滅絕。

總結這些競賽的經驗, 會體認出 TIT FOR TAT 所以處處會取得優勢, 基本上它是一個會導引合作的策略。除了前面說的三種特性外, 它還有一個特性就是明確, 跟它交手的策略很快就能察覺到不容易剝削它。像是 RANDOM 那樣的策略, 因爲太無章法可循, 對手只好把它當作一個非常不合作的敵人處理了, 因此它的積分一直是敬陪末座的。

Axelrod 寫了一本書叫做「合作的演化」, 把賽局導引出合作的例證, 再進行了深入的考察。他發現在一片兇狠的生態環境中, 只要有一小撮誘導合作的生物, 就可以存活下去。而且它們如果具有像 TIT FOR TAT 的四種優點, 便可以在演化中漸漸取得上風, 大量的繁殖下去。而且有趣的是, 在一大堆惡漢中來了一小撮合作者, 它們能存活繁殖。但是一旦合作者取得上風, 就不在會被惡漢入侵破壞。

Axelrod 的研究有很大的啓示作用, 從較侷限的模擬例證中可體認出, 合作的產生並不需要有道德的動機, 但是一旦有了立足點, 從實際利益上合作者也會獲得好的報應。這種教訓運用到人類社會、政治、經濟的研究裡, 實在頗有耐人咀嚼的地方。

我們從簡單的「囚徒困局」模式出發, 瞭解一些有關選擇的難題。然後利用反覆操作「囚徒困局」的模式, 更引發了有關生態演化方面極具啓發性結果。雖然這種過程裡, 我們並沒有證明一大堆困難的定理, 其實它仍然是數學的精彩應用。數學提供了概念的架構與模擬的工具, 以及分析組織的方法。希望從這個例證中, 能使讀者了悟到數學應用的宏大範圍。

—本文作者任職於中央研究院數學研究所—

淺談統計

魏慶榮

統計是門有系統地研究數據的學科, 大致可以分成三個部分。一是數據的收集, 二是數據的整理, 三是數據的分析。以下, 我們用一些例子, 來說明統計的這三個課題。

一. 數據的收集

首先我們談數據的收集, 表面上看來這是很簡單的事情, 只要到圖書館翻翻文獻就能了結的事。這種已經擺在那邊, 我們無法插手的數據, 統計叫它做「觀察」得來的資料。這種資料由於不知道它的來源, 有時不太可靠。另外有兩種搜集資料的方法, 那就是「抽樣」和「實驗」。

像民意調查就是抽樣調查的一種。本來抽樣的目的, 是想設計一套方法, 在一群很大的母體 (如選民), 抽出一小部分具有代表性的樣本來, 然後就他們的意見來做分析。爲了具代表性, 不偏那個部分 (如特定族群), 有時還靠丟銅幣的方式 (隨機) 來抽樣。可是報紙上報導的民調, 常常是各個黨派用來造勢而不在反映眞實狀況, 因此選前三黨都號稱民調對他們有利, 造成選民認爲統計是騙人的戲法。還有一些人誤以爲到街頭隨便問幾個人, 就能代表民意, 這跟認爲 Call in 就能代表一般人的意見一樣是不對的, 因爲這種樣本是取自於一特殊的人群 (上街的, 或想 Call in 的), 常常無法代表整個母體。有些廣告也和這個相似, 譬如說,「三個醫生當中有兩個推薦 ×× 藥」。這句話暗示我們, 所有醫生當中, 三分之二的醫生推薦該藥。事實上, 我們應該問一問藥廠, 是不是只問過三個醫生的意見? 而且那三個醫生和藥廠的關係又如何? 譬如說, 其中推薦的那兩位是不是藥廠老闆的親友? 如果是, 這種樣本根本就是數目太少又有偏, 教人如何能相信?

其次, 我們來談實驗。實驗設計是教我們有系統地找「配方」的方法。先舉一個例子。我們常常聽人家說, 有人生病了, 到某個廟抽藥籤, 結果吃好了, 因此便說這神明很靈。可是仔細想一想, 我們會發現吃不好的人, 都怪自已沒福氣 (誰敢怪神明?), 因此在報喜不報憂的情況下, 聽到的就只有好的一面了 (有偏樣本)。那麼我們如何才能確定神明是否靈驗呢? 有一個方法便是安排個實驗, 同時找兩組病人, 病症相似, 一組給神明的藥吃, 另一組給白開水喝, 再比較結果, 便能明白神明究竟靈不靈了。近代藥品的臨床實驗,

就採取類似的設計來檢定新藥有效與否。在工業製造, 爲求產量高、品質好, 對進料的成分、溫度的高低等等、則常利用一些比較複雜的實驗設計來安排。

二. 數據的整理

現在, 我們來講數據的整理。通常數據有時非常雜亂, 有時非常龐大, 我們不可能從這些原始資料直接看出所要的訊息。譬如說, 大專聯考所有考生的成績, 由於多到只能放在磁碟片, 如果我們想問, 今年的數學成績是不是比去年考得好, 即使有辦法看遍原始成績, 也很難回答這個問題。這時我們先得把資料重組、分類, 用幾個簡單的量 (叫描述統計量), 或畫個圖形, 清晰而有效地把訊息傳達出來。常常看見的百分比圖或直方圖都屬於資料整理的部份。至於做摘要的統計量, 一般用來描述數據的中心值或最具代表性值, 常見的有平均值、中值和衆數 (最常出現的那個值)。其次, 用來描述這組數據離中心值發散的程度, 如級距 (最大值和最小值的差)、標準差、百分位數 ··· 等。這些量有什麼用呢? 大家可能都用過中文電腦吧, 其中字音輸入法很大的困擾是同音字太多, 電腦會把所有的同音字列出來教我們選。可是那個字要列在最前面呢?　當然是最常用的字!可是那個字又是最常用的呢?　我們當然不可能把所有的書、雜誌、信件拿出來檢查一下, 只有選擇一些樣本來統計一下各個字的使用次數 (頻數)。譬如說, 有人拿小學六年的課本, 有人拿一年的報紙來分析。分析出來的衆數, 就是排在最前面的字。而輸入法的好壞, 就決定於這些樣本是不是能代表平常使用的習慣。最近有些字音輸入法, 不需要一次選一個字, 電腦會自動選字, 打完一句還會自動修改, 這些功能都是利用比較複雜的統計方法做出來的。

再舉一個例子, 假設你是成衣廠的老板, 如何決定成衣大小型號的件數呢?　某種型號, 做太少搶不到市場的先機, 做太多又怕賣不出去, 怎麼辦呢?　這時要是有個成衣型號調查的頻率圖那就好, 我們就會明白特大號、大號 ···、小號等等佔人口的比率有多少, 就能幫我們做決定。

在選取描述統計量時, 有時要很小心。底下是個有關大學入學是否歧視女性的例子。實際的例子發生在美國柏克萊大學, 他們沒有大專聯考, 憑介紹信申請的。我們把數據簡化, 並假設全校只有兩個系:

	男		女	
	接受	拒絕	接受	拒絕
電機系	30	30	10	10
英文系	5	15	10	30
全 校	35	45	20	40

女權運動的人說學校有性歧視, 因為男生入學率是 $35/80=0.4375$, 大於女生的入學率 $20/60=0.3333\cdots$。學校緊張了, 就去問各個系。每個系都說, 我們絕對男女平等。查一下的結果, 電機系男、女生入學率都是 1/2, 英文系男、女生入學率都是 1/4。這怎麼可能呢?　那裡出了錯誤呢?　我們看看電機系總共收了40個學生, 遠比英文系的15來得大, 而大部分的的女生,60個中的40個,

卻又申請英文系, (相對的, 男生80個中, 只有20個申請英文系), 雖然拒絕率相同, 總個數卻相當可觀, 因此造成各個系沒歧視而整體看來貌似歧視的現象。換句話說, 在系的層次, 以男女入學率做爲描述統計量是合適的、在學校的層次就會產生問題了。一個比較合理的全校性統計量要考慮到各個系佔的比重, 所以用

男 (女) 生入甲系的比率×申請甲系的學生比率 +男 (女) 生入乙系的比率×申請乙系的學生比率

比較能反映出全校的男女生個別入學率。上面的例子, 依照這個方法算, 男女生入學率都是 1/2, 相當合理。

三. 機率論

最後, 我們來談談數據的分析。這部份的統計叫做推論統計, 是要從計算出來的統計量做出結論。像剛剛提到成衣廠的例子, 有了頻率圖後, 就要決定各個型號的製造個數。由於統計量是由部份樣本算出來的, 和由母體算出來的量總難免有誤差, 誤差的大小也會隨樣本的不同而變化。機率論就是來描述這些誤差大小的工具。

機率論是個很有趣的題材, 常有出人意料之外的結果。假設有一天我們走在街上, 突然被邀去檢查, 看看有沒有感染到某種危險疾病 (如愛滋病), 而結果是陽性反應。碰到這種情況, 我們不免會怨天尤人, 說這種疾病非常少, 總人口的一小部份 (假設是10^{-6}) 才有, 爲何偏偏就落在我的身上。接著可能會有人來安慰, 說這個檢查不是百分之百準的, 沒有病而測出陽性反應是有的, 而且大到十分之一。可是我們還是憂心忡忡, 直覺地認爲有百分之九十的機會還是會得到。眞的是 9/10 嗎? 其實, 檢查還有一種誤差, 也就是有病卻得到陰性反應。如果這個機率是 1/100 的話, 那麼我們眞 正得病的機率應該是

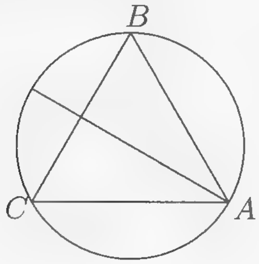
$$\begin{aligned}
&P(\text{得病} \mid \text{陽性反應})\\
&= 10^{-6}\cdot(1-0.01)/[10^{-6}\\
&\quad \times 0.99+(1-10^{-6})\times 0.1]\\
&< 10^{-6}/0.1\\
&= 10^{-5}。
\end{aligned}$$

上式表明的是: 有了陽性反應後, 得病的機率小於十萬分之一。這個數字相當小, 因此除非有其它症狀、否則不必那麼緊張。

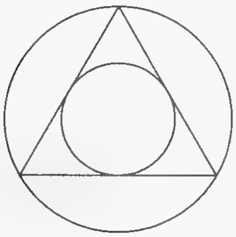
和機率相關的一個常用語是「隨機」。如果我們從 1 到 10 隨機抽出一個數字來, 通常我們認爲任一特定數字被抽中的機會是 1/10。我們事實上“私下”假設了機率的分布是均勻的。這種把「隨機」和等機率等同起來的做法, 在可能值, 如 1 到 10, 是有限個時還好。可是在可能值是無限、連續時, 這種直覺就會產生麻煩了。想想看, 給定一個單位圓,「隨機」選取一條弦, 那麼這條弦的長度大於內接正三角形的邊長的機率有多大?

第一個答案: 由於弦的一個端點落在那裡都一樣, 我們把它固定在 A, 由 A 點做一個內接正三角形 ABC。由於另一端點只有落

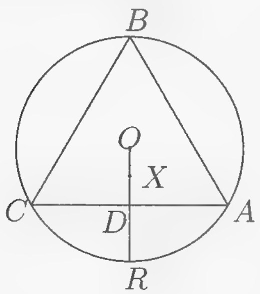
在弧 BC 上, 弦長才會大於邊長, 因此機率是 BC 弧長/圓周長 $= 1/3$。



第二個答案: 由於每一條弦都由其中點唯一決定, 所以隨機取一條弦等於 隨機取圓內一個點。若點落在半徑爲1/2 的同心圓內, 則弦長大於內接正三角形的邊長, 因此機率是 同心小圓面積/圓面積 $= 1/4$。



第三個答案: 跟上面一樣只考慮弦的中點 X, 由圓心經過 X 畫一條半徑 OR, 其中點爲 D。經 D 點畫一垂直於 OR 的弦 AC, 由 AC 可造一內接三角形 ABC。不難看出: X 只有落在 OD 上, 弦長才會大於 AC 長, 因此機率是 OD 長/ OR 長 $= 1/2$。



同一個問題, 居然有三個答案, 什麼地方出了問題? 在第一個答案中, 隨機取弦變成隨機在圓周上取一點, 而在第二個答案變成隨機在圓內取一點, 在第三個答案卻又變成隨機在半徑上取一點。每個說法都滿足直覺, 可是答案卻都不同。「隨機」就是等機率, 這個直覺行不通了。因此我們談機率時, 一定要確定樣本空間 (是圓周? 是圓內? 是弦?) 和機率 (是否等機率?)。

有了樣本空間和機率函數, 現在我們能描述數據發生的機率了。數據 x 的可能值如果是有限或可數個 (離散型), 我們用機率密度函數 $f(x) = P[X = x]$ 來描述。如果是連續型的, 我們用密度函數$f(x)$在 (a,b) 的積分,

$$P[a < x < b] = \int_a^b f(x)dx$$

來表達 x 落在 a, b 之間的機率。最有名的密度函數就是鐘形的正態密度函數

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad -\infty < x < \infty,$$

其中μ 代表中心點 (平均值),σ 是標準差, 可以用來量數據離中心散開的程度。正態密度在許多領域經常出現。物理學家說數學家證明了在正常狀況下, 密度是正態的, 而數學家卻說, 物理學家發現了自然界是正態的。當然這都只是部分事實, 一般人認爲在穩定的狀況下, 數據 (如產品的規格) 可以當做是正態的。心理界與教育界認爲上智與下愚人很少, 大部份人在中間, 因此構成正態分布 (常態分班的由來)。底下, 我們舉一個實例來看看正態分布在統計推論上的應用。

四. 數據的分析 — 推論統計

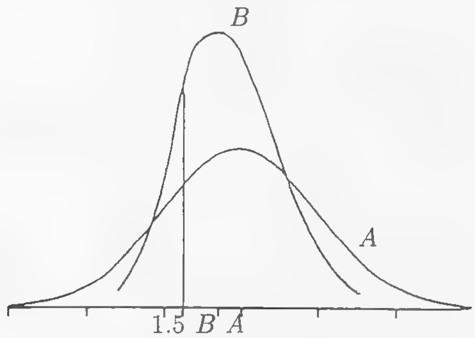
這個實例與衛星接收器相關。台灣做的衛星接收器曾在中東戰爭出了名。爲了便於說明, 我們把故事稍微加油添醋。有個美國廠商, 想要買台灣工廠製造的衛星接收器。他要求兩家工廠各做三個樣本, 從三個樣本他要判斷那個工廠的產品不良率合乎標準, 比如說, 那家工廠產品不良率小於 20%, 就選那個。現在假設對某個規格的要求是大於 1.5 (工業界叫做望大需求), A、B 兩廠做出來的結果如下:

廠商 / 數據	A	B
1	1.51	1.51
2	1.53	1.53
3	1.7	1.48

很顯然, A 廠三個都合乎規格, 而 B 廠卻有一個接收器, 其規格小於要求。猜猜看, 美商選了那個工廠? B 廠! A 廠很不服氣, 要求說明。美商就傳眞一份計算如下:

廠商 / 統計	A	B
平均值	1.58	1.506
標準差	0.0109	0.000048
不良率	0.2524	0.1928

傳眞中並說明了, 不良率是根據正態分布計算的。A 廠還是一頭霧水。事實上, 我們用白話來說是這樣的: 美商假設工廠的製程是穩定的, 產品規格的大小依正態密度來分佈。A 廠商雖然都合乎規格, 但是產品值的大小發散程度 (標準差) 太大, 如果正態分布是對的話, 將來出現不合規格的產品機會就比 B 廠大。B 廠雖然有個不合規格, 但是其大小變化很小, 依正態分布計算, 不良率小於 20%, 所以可取。用圖來說明



A 密度較肥胖,B 密度較陡瘦, 因此 1.5 左邊的面積 B 比 A 小。

這個例子似乎違反常理, 當然還有很多可討論的地方。比如說, 用三個樣本來估計平均值和標準差是不是太少了? A 廠是不是逐步在改善他的製程, 因此愈做愈好, 正態分布是不是還適合呢? 這些都是很有趣的問題, 特別是要選多少樣本才合乎道理, 正是推論統計裡一個重要的課題。

五. 結論

在這篇文章裡, 我們簡單地介紹了統計的內容, 並且用幾何的例子來說明統計的數學工具 – 機率論, 也用了民意調查、藥物臨床

實驗、電腦輸入法、工廠製造、性別歧視和病症檢定等做例子, 來說明統計應用的廣泛。事實上, 做爲方法論的統計, 在人文社會科學、生命科學、自然科學都扮演著重要的角色, 歡迎大家走進這個領域共同努力。

註: 本文將同時發表於通識教育季刊。

參考資料

(1) 比較通識性的入門書, 可以參考
Statistics, Concepts and Controversies 2nd ed., D. S. Moore, 1985, Freeman and Company, New York.

(2) 有關抽樣調查的入門書, 可以參考
抽樣調查, 林進田,1993, 華泰書局。
抽樣方法之應用, 韋端,1990, 中國統計學社。

(3) 有關實驗設計的入門書, 可以參考
Statistics for Experimenters. G.E.P. Box, W.G. Hunter and J.S. Hunter 1978, Wiley, New York.

(4) 有關統計的誤用, 可以參考
跨越數字陷阱, 董時叡,1991, 遠流。

(5) 第三節裡舉的隨機選取弦的例子, 叫做 Bertrand's paradox, 比較詳細的說明及其它相關例子可以參考
Paradoxes in Probability Theory and Mathematical Statistics, C.J. Szekely, 1986 Akademiai Kiado, Budapest.

(6) 有關常態分班與自學方案的討論, 可以參看
論國中自學案班級常模五分制之公平性, 林妙香, 國科會研究彙刊, 人文及社會科學, 民83,7月,4卷,2期,246-263頁。

(7) 統計在生物、政治、社會和物理世界的許多實例, 可以參看
Statistics: A Guide to the Unknown. 3rd ed. J. M. Tanur et al., 1989, Wadsworth, California.

(8) 統計在品管方面的應用以及 Deming 之貢獻可參考
Dr. Deming, The American Who Taught the Japanese About Quality, R. Aguayo, 1990, Carol.
台灣有翻譯本: 品管大師戴明博士, 汪益譯,1991, 聯經。

—本文作者任職於中央研究院統計科學研究所—

守恆律方程組簡介 (II) —— 熵條件

陳宜良

一. 簡介

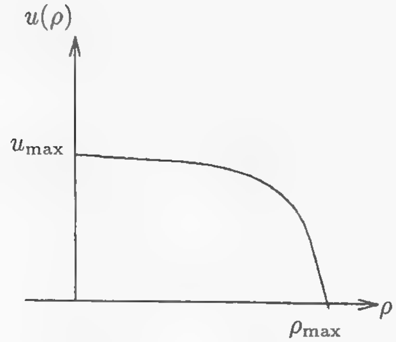
在前一講 (數學傳播第17卷第一期, 民國82年3月) 我們介紹了守恆律方程的來源, 並以車流問題爲例說明震波 (shock wave) 現象是此類方程的本質。在這一講中, 我們將要闡述震波理論另一個重要觀念–熵條件, 它與守恆律方程解的唯一性以及熱力學第二定律相關。我們將簡單地介紹熵條件的來源和它的一些推論。

二. 熵條件的起源 — 不唯一性的困惑

首先我們注意的是守恆律方程組的光滑解是唯一的。這一點很容易由特徵線方法證得。但若考慮有不連續解 (弱解) 時, 則解不唯一。我們以車流問題爲例說明這個不唯一性的困惑。由前講中, 我們回憶車流問題之守恆律方程模型爲

$$\rho_t + f(\rho)_x = 0 \tag{1}$$

其中 ρ 爲車流密度, $f(\rho)$ 爲車流通量, $f(\rho) = \rho \cdot u(\rho)$, u 爲車速, $u(\rho)$ 的經驗方程如圖一。

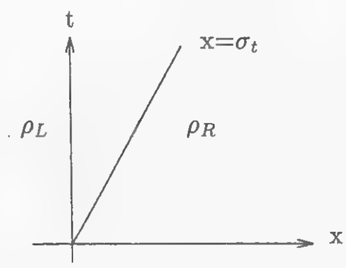


圖一

我們考慮下列黎曼初始條件:

$$\rho(x,0) = \begin{cases} \rho_L & x < 0 \\ \rho_R & x > 0. \end{cases} \tag{2}$$

由跳躍條件 [1] 知, 不論 ρ_L, ρ_R 爲何時, 震波解 (如圖二)



圖二

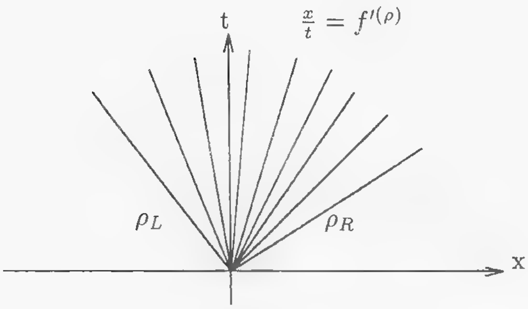
$$\rho(x,t)=\begin{cases}\rho_L & x<\sigma t\\ \rho_R & x>\sigma t,\end{cases}\qquad (3)$$

永遠爲一弱解, 其中

$$\sigma=\frac{f(\rho_R)-f(\rho_L)}{\rho_R-\rho_L}$$

爲震波波速。當 $\rho_L<\rho_R$ 時, 這個震波解反映的是塞車現象。但當 $\rho_L>\rho_R$ 時, 這個震波解卻不是物理解, 因爲由直觀上, 我們知道前面車陣較後面稀疏時 (即 $\rho_L>\rho_R$) 是不會塞車的。這時, 眞正的物理解是稀疏波解 (rarefaction wave)(見圖三):

$$\rho(x,t)=\begin{cases}\rho_L & x<f'(\rho_L)t\\ \rho_R & x>f'(\rho_R)t\\ \rho & f'(\rho_L)\le\frac{x}{t}\le f'(\rho_R).\\ & f'(\rho)=\frac{x}{t}.\end{cases}$$



圖三

它反映的是車陣由密漸疏的現象。前述討論說明了在 $\rho_L>\rho_R$ 時, 黎曼問題 (1)(2) 有兩組弱解: 一個是稀疏波解, 一個是震波解。事實上, 讀者很容易造出無窮多組弱解。這個不唯一性是守恆律方程的缺陷。因此, 我們須對震波解附加條件以篩選出具物理意義之解。比方說, 在車流問題中, 在震波 (ρ_L,ρ_R) 上, 我們可附加 $\rho_L<\rho_R$ 的條件, 也就是說, 只有在前方密度較後方高時才能有震波解。用這個外加條件我們可以解決前述的不唯一性困惑。這個條件是不內含在守恆律方程的, 我們稱之爲熵條件。在空氣動力學裡, 對應的熵條件爲: “氣體穿過震波時其熵要增加”, 更具體地說, 對前進震波而言, 氣體是由右方穿過震波, 因此其熵條件可寫爲 $S_L>S_R$, 其中 S 爲氣體的熵。對後退震波而言, 則對應之熵條件爲 $S_L<S_R$ 。

3. 一般的熵條件

前節所談的是熵條件的兩個特例。在震波理論中, 我們希望找到一個可適用於一般守恆律方程的熵條件。爲找尋此一條件, 我們先檢討爲何守恆律方程會有不唯一性的缺陷。我們以空氣動力學爲例, 較完整的數學模型是 Navier-Stokes 方程 ([2])

$$\begin{aligned}&\rho_t+(\rho u)_x=0\\&(\rho u)_t+(\rho u^2+p)_x=(\mu u_x)_x\\&E_t+((E+p)u)_x=(\mu u u_x+\kappa T_x)_x\end{aligned}$$

這裡, μ 爲黏性係數, κ 爲熱傳係數。方程右邊的項通常稱作黏性項。在常見的應用問題裡, μ,κ 之值 均在 10^{-6} 左右, 因此在光滑解時, 黏性項可忽略。但在出現震 波時, u_{xx},T_{xx} 變化均大, 此時黏性項則不能忽略, 它刻劃了氣體在穿過震波時, 如何因摩擦與熱傳而造成熵的增加。因此, 對空氣動力學而言, 熵條件背後的機制是黏性項, 是熱力學第二定律。

爲了將黏性項與熵條件的關係說明更清楚以及找一般方程的熵條件, 我們考慮有黏項的守恆律方程。我們仍以車流問題爲例, 爲了加入黏性項的考慮, 首先我們將模型中之 $u(p)$ 修改爲

$$u(\rho) \leftarrow u(\rho) - \varepsilon \frac{\rho_x}{\rho}, \quad \varepsilon > 0,$$

其中 $-\rho_x/\rho$ 的物理意義爲車陣隨 x 變化之膨脹率。因此 $-\varepsilon\rho_x/\rho$ 表示當車陣膨脹時 (即稀疏), 車速會稍微加快。反之, 則車速稍減。經修正後之模型爲

$$\rho_t + f(\rho)_x = \varepsilon \rho_{xx}, \tag{3}$$

其中 $\varepsilon\rho_{xx}$ 即爲黏性項。我們想研究黏項在震波附近含有何種不屬於原守恆方程的訊息。爲此, 我們考慮 (3) 的行波解: 即 $\rho^\varepsilon(x,t) = \rho(\frac{x-\sigma t}{\varepsilon})$, 其中 $\rho(-\infty) = \rho_L$, $\rho(+\infty) = \rho_R$, (ρ_L, ρ_R) 爲一震波, 而 $\sigma = \sigma(\rho_L, \rho_R) \equiv (f(\rho_R) - f(\rho_L))/(\rho_R - \rho_L)$ 爲其波速。當 $\varepsilon \to 0$ 時, $\rho^\varepsilon \to (\rho_L, \rho_R)$ 。我們將 ρ^ε 代入 (3) 得

$$\rho'' = (f(\rho) - \sigma\rho)'。$$

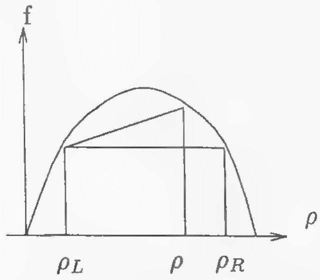
將此式積分一次, 並用 $\rho(-\infty) = \rho_L$ 得

$$\begin{aligned} \rho' &= f(\rho) - f(\rho_L) - \sigma(\rho - \rho_L) \\ &= F(\rho)。 \end{aligned} \tag{4}$$

由跳躍條件可得 $F(\rho_L) = F(\rho_R) = 0$ 。讀者不難證得:(4) 有一解滿足 $\rho(-\infty) = \rho_L$, $\rho(+\infty) = \rho_R$ 的充分必要條件爲

$$\sigma(\rho_L, \rho) > \sigma(\rho_L, \rho_R) \quad \forall \rho \text{ 介於 } \rho_L, \rho_R \text{ 間} \tag{E}$$

其幾何意義爲 f 在 ρ_L, ρ_R 上的割線斜率要小於 f 在 ρ_L, ρ 之割線斜率, $\forall\rho$ 介於 ρ_L, ρ_R 之間 (如圖四)。

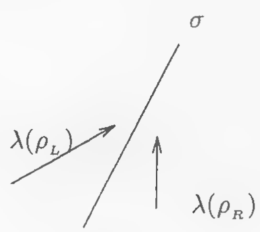


圖四

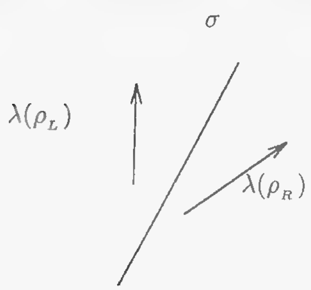
這是一個內含在黏性方程但卻不屬於原守恆律方程的性質, 這便是一個具一般性的熵條件, 是蘇俄女數學家 Oleinik 在50年代所提出的。Lax 對此條件有另一深入的看法, 他觀察震波速度與其左右兩邊特徵線速度的關係而提出下列熵條件

$$\lambda(\rho_L) > \sigma > \lambda(\rho_R), \tag{L}$$

其中 $\lambda(\rho) = f'(\rho)$ 爲特徵速度。這個條件稱作 Lax 熵條件, 當 $f'' \neq 0$ 時, (L) 與 (E) 是等價的。(L) 的意義是特徵線僅允許穿入震波 (如圖五)



圖五



圖六

而不能由震波射出 (如圖六)。這個性質可推出所有特徵線均可回溯至初始時刻。由於特徵線是消息傳播的路徑, 因此在任何 $t > 0$ 時刻之 ρ 的行為均可由 ρ 的初始值決定。這個性質稱作因果律 (Causality), 是熵條件的一個重要推論。

4. 由熵條件所得出之推論

下面一個定理是由熵條件所導出的另一重要定理。

定理一: ([3]) *考慮單守恆方程式*

$$u_t + f(u)_x = 0 \tag{5}$$

若 u, v 為滿足 (5) 與 (E) 的弱解, 則 u, v 滿足

$$\frac{d}{dt}\int |u(x,t) - v(x,t)|dx \leq 0。$$

定理一的一個直接推論是下列唯一性定理。定理一的證明可直接用 (5) 與 (E) 證得。

定理二: (*唯一性定理*) *滿足守恆律方程 (5) 與熵條件之弱解可由其初始值唯一決定。*

看到這裡, 讀者或許有一個疑問: 既然守恆律方程有缺陷, 何不就用含黏性項的守恆律方程呢? 如氣體方程中就用 Navier-Stokes 方程, 而不用 Euler 方程。回答此問題是, 除在邊界層與震波附近的極小的區域外, 附加熵條件的守恆律方程仍是相當精確的模型, 其解已經可以反映出主要的現象。而目前來說, 守恆律方程也確定較黏性方程來得容易解。

最後解的漸近行為也由熵條件推導出, 這方面結果容待第三講說明。

參考資料

1. 陳宜良, 守恆律方程組簡介, 數學傳播季刊第17卷第1期, 民國82年3月。
2. Courant and Friedrichs, Supersonic Flow and Shock Waves, Springer-Verlag, 1948。
3. Quinn, R, Solutions with Shocks: an example of an Li-contrction semi-group, Comm. Pure Appl. Math. 24 (1971) 125-132.

—本文作者任教於台灣大學數學系—

淺談固有值問題$Ax=\lambda x$數值解法

林文偉

(一) 固有值問題

什麼叫做固有值問題呢? 任意給定一個複數方陣 $A(\in \mathbf{C}^{n\times n})$, 若常數 $\lambda(\in \mathbf{C})$ 及非零向量 $x(\in \mathbf{C}^n)$ 滿足 $Ax=\lambda x$, 則稱 λ 爲 A 的固有值 (eigenvalue), 而 x 稱爲對應於λ的固有向量 (eigen-vector corresponding to λ)。所以固有值問題, 即是求解 λ, 使得 $(A-\lambda I)x=0$。由於$x\neq 0$, 所以 $A-\lambda I$ 必爲奇異 (singular), 即 $\det(A-\lambda I)=0$

定義 A 的譜集合 (spectrum) $=\{\lambda\in \mathbf{C}|\det(A-\lambda I)=0\}$, 爲固有值所構成 的集合。而將 $\det(A-\lambda I)$ 展開可得一個 λ 的一元 n 次多項式, 寫爲 $\det(A-\lambda I)=p(\lambda)=\prod_{i=1}^{s}(\lambda-\lambda_i)^{m_i}$其中 $\sum_{i=1}^{s}m_\iota=n$ $\lambda_i\neq\lambda j$, 這樣就可以把任何一個矩陣的固有值求出來。

事實上, 要如何解此多項式呢? 我們知道, 在低於五次時, 多項式才有公式解, 而高於五次時, 雖沒有公式解, 但我們可以用牛頓法來求其近似解, 但是這樣不一定行的通, 我們來 看下面的一個特例。

例: 假設特徵多項式爲 $p(\lambda)=(\lambda-1)(\lambda-2)\cdots(\lambda-20)=\lambda^{20}-210\lambda^{19}+\cdots+243290\cdots0$, 多項式在存入電腦時, 會有一個捨入誤差, 所以我將此多項式寫成 $p(\lambda,\varepsilon)=p(\lambda)-210\varepsilon\cdot\lambda^{19}$, 我們只考慮在 λ^{19} 次方項的係數有些許誤差, 其他項的係數均無誤差, 我們想要探討在原先多項式中, 20 爲其中的一個固有值, 而當存入電腦後, 有了此項誤差之後, 會變成多少? 這個多項式, 其實爲 ε 的可微分方程式, 我們考慮相對誤差 $\frac{\lambda(\varepsilon)-\lambda(0)}{\lambda(0)}$, 其中 $\lambda(0)=20$, 這個相對誤差近似於 $\frac{1}{\lambda(0)}\varepsilon\frac{d\lambda(0)}{d\varepsilon}$, 因爲 $\frac{\lambda(\varepsilon)-\lambda(0)}{\lambda(0)}$ 約若等於 $\frac{d\lambda}{d\varepsilon}(0)$, 再對 ε 做微分, 得

$$\frac{dp}{d\varepsilon}=\left[\frac{dp}{d\lambda}\frac{d\lambda}{d\varepsilon}+\frac{dp}{d\varepsilon}\right]_{\lambda=\lambda(\varepsilon)}=0 \qquad (1)$$

將 (1) 式代入, 得到相對誤差

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{\lambda(0)}\varepsilon\cdot\left[-\left(\frac{dp}{d\lambda}\right)^{-1}\frac{dp}{d\varepsilon}\right]_{\lambda=\lambda(0)} \\ &= \prod_{j=1}^{19}(20-j)^{-1}20^{18}\cdot 210\cdot\varepsilon \\ &\approx 4.5\times 10^{8}\times\varepsilon \end{aligned}$$

取 $\varepsilon=2^{-23}/210$, 推得相對誤差 $E\approx 0.26$, 原本特徵值爲 20, 但經過電腦運作, 因所用的方法不好, 結果反而得到 20.26, 相對誤差頗大, 所以牛頓法並非適用於所有情形。在這樣的情形下, 我們將如何改善呢? 先看下面定理。

定理: (Schur Theorem)

對任何一個矩陣 A, 存在 unitary 矩陣 U, 即 $U^*U=I$, 使得 $U^*AU=R$, R 爲一上三角矩陣。

所以 $\det(A-\lambda I)=\det(URU^*-\lambda I)=\det[U(R-\lambda I)U^*]=\det(R-\lambda I)$, 因爲 R 爲上三角矩陣, 所以 A 的固有值即爲 R 矩陣的對角元素, 即 $\lambda_i=R_{ii}$, $i=1,2,\cdots,n$, 這種求固有值的方法, 理論上是很簡單, 但在證明這個定理時, 是用數學歸納法。意即在 Schur 定理中的上三角矩陣 R, 並非容易求得。但是這個定理相當重要, 現在我們來看一個例子。

例: 假設現在蓋一個農場, 養殖大小不同的豬隻。一年之後有 2/3 大型豬賣出, 1/3 留下。而一年之後, 有 3/4 中型豬變成大型豬, 3/5 小型豬變成中型豬, 而大型豬每年可生 2/3 的小型豬。現在令大型豬個數 x_1, 中型豬個數 x_2, 小型豬個數 x_3, 則整個問題可寫成:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{3}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{5} \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{5} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

$$令\quad A=\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{3}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{5} \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{5} \end{bmatrix}$$

但在農場上, 養殖大小不同的豬隻, 須有不同的設備, 所以我們當然希望每一年不要有太大的變化, 這樣才便於經營與管理。所以, 即希望得到 $Ax=\lambda x$ 其中 $\lambda=1$ 且 $x\neq 0$。這便是固有值問題, 然而如何確定矩陣 A 中有一個固有值爲 1 呢? 我們看 A 的轉置矩陣 A^T, 因 $A^T\cdot\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}=1\cdot\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ 所以可以確定 A^T 有固有值 1, 所以 A 也有固有值 1, 雖然他們分別對應的固有向量不同, 但他們共有固有值 1 。而經過求固有值之後, 我們求得 A 的固有值爲 1 及 $-0.008\pm 0.577i$, 而對應於 1 的固有向量爲 $(0.575\ \ 0.511\ \ 0.639)^T$, 所以我們在養殖豬隻時, 不同體型的豬隻按照上述的比例, 則可以得到最佳的結果。

(二) 冪法 (Power Method)

接下來我們要介紹的方法, 利用乘冪來收斂至所欲求的固有值。

假設 A 爲可對角化 (diagonalizable) 矩陣, 即存在 n 個固有值, 設爲 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$; 其相對的固有向量爲 $x_1,x_2,\ldots,x_m$, 所以 $Ax_i=\lambda_i x_i$ $i=1,2,\cdots,n$, 假設這 n 個固有值中, 有一個絕對值爲最大, 令 $|\lambda_1|>|\lambda_2|\geq\cdots\geq|\lambda_n|$, 任給一個不爲 0 的起始值 u_0, 我們可以將 u_0 寫成所有固有向量的線性組合, 即 $U_0=\sum_{i=1}^n\alpha_i x_i$, 將 A 乘以 u_0, 反覆地乘, 因爲 x_i 爲 A 的固有向量, 所以我們得到 $A^sU_0=\sum_{i=1}^n\alpha_i\lambda_i^s x_i=\lambda_1^s\{\lambda_1 x_1+\sum_{i=2}^n\alpha_i(\frac{\lambda_i}{\lambda_1})^s x_i\}$ 因此, $\lambda_1^{-s}A^sU_0=\alpha_1 x_1+\sum_{i=2}^m\alpha_i(\frac{\lambda_i}{\lambda_1})^s x_i$, 又當 s 很大時, $\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\to 0$。所以數列

$$\{\lambda_1^{-s}A^sU_0\}\to\alpha_1 x_1 \tag{2}$$

這個式子是一個方向, 指引我們如何去求固有值, 而 λ_1 是我們想求的, 但是上述式子,

並不能求得 λ_1 的值, 所以, 我們來看所謂的冪法, 是如何求取固有值呢?

假設 ℓ 是一個 linear functional, 則冪法可寫爲

$$\text{(Power Method)}\begin{cases} u_0: \text{起始值} \\ v_{s+1}=Au_s \\ k_{s+1}=\ell(v_{s+1}) \\ v_{s+1}=v_{s+1}/k_{s+1} \end{cases}$$

上述的遞迴式, 即爲求取固有值的冪法。但爲何這樣即可求到固有值呢?

定理: 假設 $\alpha_1\neq 0$, $\ell(x_1)\neq 0$, $\ell(v_s)\neq 0$, $s=1,2,\cdots,n$,

$$\text{則}\quad \lim_{s\to\infty}k_s=\lambda_1$$
$$\text{且}\quad \lim_{s\to\infty}U_s=\frac{x_1}{\ell(x_1)}$$

證明: 因爲

$$\begin{aligned} u_S &= A^sU_0/\ell(A^su_0) \\ k_S &= \ell(A^su_0)/\ell(A^{s-1}u_0) \end{aligned}$$

由第2式 $\Longrightarrow$

$$\begin{aligned} &\lambda_1^{-s}\ell(A^su_0)\longrightarrow \alpha_1\ell(x_1) \\ &\lambda_1^{-s+1}\ell(A^{s-1}u_0)\longrightarrow \alpha_1\ell(x_1) \end{aligned}$$

所以 $\lambda_1^{-1}k_s\longrightarrow 1\Longrightarrow \lim_{s\to\infty}k_s=\lambda_1$

$$\begin{aligned} \text{又}\quad u_s &= A^su_0/\ell(A^su_0) \\ &= \alpha_1x_1+\sum_{i=2}^{n}\alpha_i(\frac{\lambda_i}{\lambda_1})^s x_i/\ell(\alpha_1x_1 \\ &\quad +\sum_{i=2}^{n}\alpha_i(\frac{\lambda_i}{\lambda_1})^s x_i) \\ &\longrightarrow \frac{\alpha_1x_1}{\alpha_1\ell(x_1)} \end{aligned}$$

由上述的證明, 我們得到冪法 (PM) 的收斂速度和 λ_2 與 λ_1 的比值有很大的關係。如果這個比值爲 0.9, $(0.9)^{20}=0.12$, 而 $(0.9)^{100}=2.6\times 10^{-5}$, 收斂的速度很差、但若比值爲 0.5, 則 $(0.5)^{20}=9.5\times 10^{-1}$ 收斂速度較快。所以這個比值對 PM 很有關係, 一但這個比值很接近 1, 收斂速度則相當慢, 此時, 該如何解決呢?

(三) 逆冪法 (The Inverse Power Method)

當 λ_2 和 λ_1 的比值很接近 1 時, 收斂速度很慢, 此時我們需要用逆冪法。此方法陳述如下, 原先固有值問題爲 $Ax=\lambda x$, 給定任一非固有值的常數 α, 則方程式改爲 $(A-\alpha I)x=(\lambda-\alpha)x$、因此 $(A-\alpha I)^{-1}x=\frac{1}{\lambda-\alpha}x$, 則 $(A-\alpha I)^{-1}$ 的固有值爲 $\frac{1}{\lambda_1-\alpha},\frac{1}{\lambda_2-\alpha},\cdots,\frac{1}{\lambda_n-\alpha}$, 假設 $\alpha=0.99$, 而 $\lambda_1=1,\lambda_2=0.9$, 則此時 $(A-\alpha I)^{-1}$ 的固有值爲 $\frac{1}{1-0.99},\frac{1}{0.9-0.99}\cdots$, 原先 $|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}|=0.9$, 而現在 $(A-\alpha I)^{-1}$ 的前二個固有值比爲 $\left|\frac{\lambda_1-\alpha}{\lambda_2-\alpha}\right|=\frac{1}{9}$, 可能 1,2 步就收斂了。事實上, 逆冪法非常簡單, 只是將 A 換成 $(A-\alpha I)^{-1}$ 就有意想不到的結果。

我們將逆冪法的關係式寫成:

$$\text{(IPM)}\begin{cases} u_0: \text{起始值} \\ v_{s+1}=(A-\alpha I)^{-1}u_s \\ k_{s+1}=\ell(v_{s+1}) \\ u_{s+1}=v_{s+1}/k_{s+1} \end{cases}$$

仿效冪法 (PM), 我們也可證以下的結果。

定理: 若 $|\lambda_1-\alpha|<|\lambda_i-\alpha| \quad i\neq 1$, 且 $\alpha_1\neq 0$, $\ell(x_1)\neq 0$ 且 $\ell(v_s)\neq 0$ $s=1,\cdots,n$, 則 $\lim_{s\to\infty} k_s=\frac{1}{\lambda_1-\alpha}$ 且 $\lim_{s\to\infty} u_s=\frac{x}{l(x_1)}$。

我們另外還有一個重要的結果, 即是逆冪法其實是二次收斂的 (quadratic convergence), 我們也可以證明逆冪法其實就是牛頓法, 而牛頓法是二次收斂, 因此可證得逆冪法亦是二次收斂。如何證明逆冪法就是牛頓法呢?

先將逆冪法做一變型, 改爲

$$(\text{IPM})\begin{cases} u_0: \text{起始値} \\ v_{s+1}=(A-\alpha_s I)^{-1}u_s \\ k_{s+1}=\ell(v_{s+1}) \\ u_{s+1}=v_{s+1}/k_{s+1}, \\ \alpha_{s+1}=\alpha_s+\frac{1}{k_{s+1}} \end{cases}$$

爲什麼要做這樣的變型呢? 因爲如果能將 α_s 取的愈靠近固有值的話, 則收斂速度較快。

現在考慮 $Au=\lambda u$ 爲一非線性方程式, 且 $\ell^T u=1$, 則整個系統可寫爲:

$$\begin{cases} Au-\lambda u=0 \\ l^T u=1 \end{cases}$$

此爲一非線性系統有 $n+1$ 個未知數, 而這個系統可用牛頓法求解, 將 F 寫成:

$$F=\begin{pmatrix} u \\ \lambda \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} Au-\lambda u \\ \ell^T u-1 \end{pmatrix}=0$$

F 的 Jacobian matrix 爲

$$F'\begin{pmatrix} u \\ \lambda \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A-\lambda I & -u \\ \ell^T & 0 \end{pmatrix}$$

所以牛頓法寫爲:

$$\begin{pmatrix} u_{s+1} \\ \lambda_{s+1} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} u_s \\ \lambda_s \end{pmatrix}-(F')^{-1}\Big(F\begin{pmatrix} u_s \\ \lambda_s \end{pmatrix}\Big)$$

乘開即爲

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} A-\lambda_s I & -u_s \\ \ell^T & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_{s+1} \\ \lambda_{s+1} \end{pmatrix} \\ =&\begin{pmatrix} A-\lambda_s I & -u^s \\ \ell^T & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_s \\ \lambda_s \end{pmatrix} \\ &-\begin{pmatrix} Au_s-\lambda_s u_s \\ \ell^T u_s-1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

所以 $(A-\lambda_s I)u_{s+1}=(\lambda_{s+1}-\lambda_s)u_s$, 令 $\lambda_{s+1}-\lambda_s=\frac{1}{k_{s+1}}$, 則 $\ell^T u_{s+1}=1$, 且 $(A-\lambda_s I)v_{s+1}=u_s$, $v_{s+1}=k_{s+1}u_{s+1}$。

即爲上述的 IPM (Variant), 所以, IPM (Variant) 爲局部二次收斂。

(四) QR 法

求 A 的固有值的終極目標, 即是 Schur Form, 即 $U^*AU=R$, 又即 $AU=UR$, 如果用計算方法來迭代, 其迭代式爲:

$$\begin{cases} U_0=I \\ AU_i=U_{i+1}R_{i+1} \end{cases} \tag{3}$$

其中 U_i: unitary 矩陣

R_i: 上三角矩陣

若 U_i 收斂至 U, 則 $R_{i+1}=U_{i+1}^*AU_i$ 收斂至 U^*AU, 而迭代式的左邊爲二已知矩陣相乘, 等式的右邊即爲大家所熟悉的的 Gram-Schmidt Process, 這是迭代式最基本的動

機, 那現在需要做一些變化, 因爲上式需要太多的機體運算, 所以我們做以下的修正:

$$Q_i = U_{i-1}^* U_i \qquad A_{i+1} = U_i^* A U_i$$

觀察:

$$\begin{aligned} A_i &= U_{i-1}^* A U_{i-1} = U_{i-1}^* U_i R_i \\ &= Q_i R_i \end{aligned}$$

另外, 又

$$\begin{aligned} R_i Q_i &= R_i U_{i-1}^* U_i = U^* A U_i \\ &= A_{i+1} \quad (\text{by} \ \ (3)) \end{aligned}$$

所以, 整個 (3) 可等價於:

$$\begin{cases} A_0 = A \\ A_i = Q_i R_i \\ A_{i+1} = R_i Q_i \end{cases} \tag{4}$$

(4) 式比 (3) 式節省許多計算量, 因爲在 (4) 式中, 不需做矩陣相乘, 而且還有許多技巧。原因是將 A 分解成 QR 後, 做完結果反過來相乘, 再予以分解, 重覆此步驟, 最後 A_{i+1} 就會收斂到一上三角矩陣, 因爲如果 U_i 收斂至 U, 則 Q_i 收斂至 I, 即 A_{i+1} 收斂至 R, 此爲基本 QR 演算法 (Basic QR Algorithm), 至於爲何 U_i 會收斂, 我們看下述定理。

定理: $A \in C^{n\times n}$ 且 $|\lambda_1| > |\lambda_2| > \cdots > |\lambda_n| > 0$, 則 QR 演算法收斂。意即 A_{i+1} 收斂至上三角矩陣。

證明: 令 $P_i = Q_1 \cdots Q_i$

$$\begin{aligned} A_{i+1} &= R_i Q_i = Q_i^* A_i Q_i \\ &= Q_i^* \cdots Q_i^* A Q_1 \cdots Q_i = P_i^* A P_i \end{aligned}$$

(Claim) $u_s = P_s \cdot e_1$, 則 $\{u_s\}$ 爲 PM(Variant) 所 生成的數列

$$\text{PM} \begin{cases} u_0 = e_1 \\ v_{s+1} = A u_s \\ k_{s+1} = \| v_{s+1} \|_2 \\ u_{s+1} = v_{s+1}/k_{s+1} \end{cases}$$

由定義得: $P_{s+1} = P_s \cdot Q_{s+1} R_{s+1} R_{s+1}^{-1} = P_{s+1} A_{s+1} R_{s+1}^{-1} = A P_s R_{s+1}^{-1} = A P_s R_{s+1}^{-1}$

所以 $u_{s+1} = P_{s+1} \cdot e_1 = A u_s r_{s+1}$, 其中 r_{s+1} 爲 R_{s+1}^{-1} 的 $(1,1)$ 元素

令 $u_s \cdot r_{s+1} = v_{s+1}$

則 $1 = u_{s+1}^* u_{s+1} = r_{s+1}^2 \cdot v_{s+1}^* v_{s+1}$

$r_{s+1} = (v_{s+1}^* v_{s+1})^{-\frac{1}{2}} = k_{s+1}$

所以做 QR 演算法即爲做 PM(Variant), 而前面已證 PM 會收斂, 故 QR 亦會收斂。

最後再看 $A_{s+1} = P_s^* A P_s$, 推到 $A_{s+1} \cdot e_1 = P_s^* A P_S e_1 = P_s A u_s$ 收斂至 Ax_1, 即 $(\lambda_1, 0 \cdots 0)^T$, 所以, A_{s+1} 收斂至矩陣爲此型態

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & * & \cdots\cdots & * \\ 0 & * & \cdots\cdots & * \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & * & \cdots\cdots & * \end{pmatrix}$$

但這收斂太慢了, 須改爲:

$$\begin{cases} A_0 = A \\ A_i - \alpha_i I = Q_i R_i \\ A_{i+1} = R_i Q_i + \alpha_i I \end{cases}$$

此過程稱爲位移式的 QR 演算法, 完全仿效前述逆冪法, 所以位移式的 QR 演算法是局部二次收斂的數值方法。

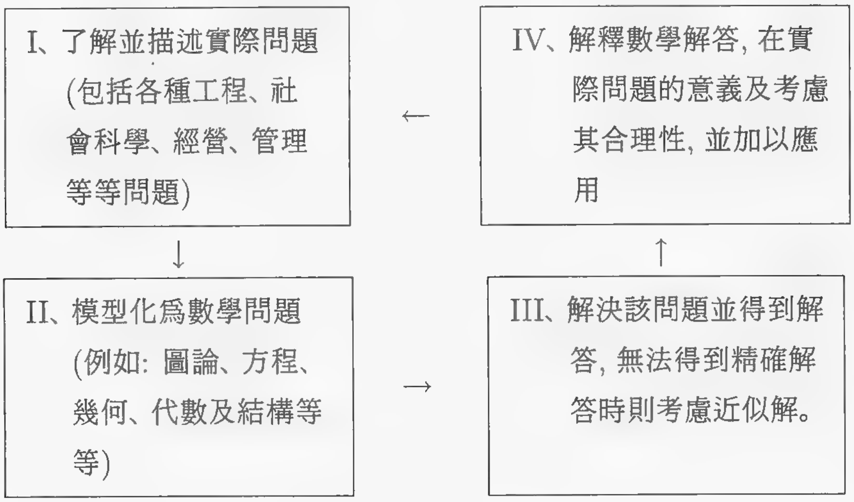
—本文作者任教於清華大學應用數學研究所—

淺談固定點定理及其應用

吳志揚

第一節　引言

這篇短文是根據作者在清華大學應用數學所通識課程的演講改寫而成的。在生活中身處逆境或危機時, 我們常自勉要能 ”以不變應萬變” 來應付危機。在數學的理論及應用中也常利用這個觀點 (或精神) 來了解一些複雜的現象。首先我們先簡要地說明數學是如何應用到各種不同領域, 這過程大概可用下面的流程圖來描述。



現在讓我們舉一個大家熟知的例子來說明如何使用這個流形圖:

雞兔同籠問題: 雲林縣鄉下有位農夫養有一群雞和兎子, 某日突然下起西北雨, 農夫和他的兒子急忙把雞和兎子一起趕進籠子避雨, 因爲時間緊迫, 顧不得將他們分開, 所以農夫和兒子分別計算頭數與脚數。數得結果是共有 1010 個頭和 2820 隻脚, 那麼雞和兎子各有幾隻呢? 相信大家小學時就會處理這個問題了, 現在我們試著用流程圖中的各步驟來解答這個問題。

I. 了解實際問題:

在此例子中, 我們關心的是雞與兎子的個數, 與問題有關的因素是脚數及頭數, 至於尾巴有多少就不是我們所關心的了。我們知道正常的雞有兩隻脚和一個頭, 而兎子有四隻脚和一個頭, 在此, 我們特別強調 ”正常” 兩個字, 因爲在實際的況狀下, 農夫所養的兎子可能有些是三隻脚的。這不是抬槓, 因爲雞與兎子數量太大, 那麼不正常的情況發生的機會也就提高了, 不信的話, 各位讀者到養雞場及養兎場看看就能了解了。記得幾年前有位仁兄講過一個政治笑話說, 以前第一屆老立委還沒退休, 立法院開會時常常從豪華轎車下來了三位老立委, 共有九隻脚。

II. 模型化為數學問題 (或建立數學模型)

就像自然科學或社會科學一樣, 要建立模型必須有一些假設 (當然, 假設必須經得起實驗或時間的考驗)。在此例子中, 我們不妨假設:

(A1) 每一隻雞有 2隻脚和 1個頭。

(A2) 每一隻兎子有 4隻脚和 1個頭。

讓我們再強調一次, 這兩個假設不一定是對的, 不過可以檢查每隻雞和兎子來確認。更重要的是我們也假設

(A3) 農夫與兒子都沒算錯。

要不然, 問題就大了。現在我們可以把這問題數學化了。

假設農夫有 x 隻雞和 y 隻兎子, 那麼我們根據 (A1), (A2) 和 (A3) 得到一個聯立方程組:

$$\begin{cases} x+y=1010 & (1) \\ 2x+4y=2820 & (2) \end{cases}$$

III. 解決數學問題

在中學時, 我們已經知道如何解決聯立方程組。實際解得:

$$x=610 \quad 及 \quad y=400。$$

IV. 解釋數學解答在實際問題的意義及考慮其合理性並加以應用

根據 (II) 及 (III) 我們知道共有 610隻雞及 400隻兎子。這結果蠻合理的, 如果得到的 答案是 610 又 $\frac{1}{2}$隻雞, 那就奇怪了。不過從數學的眼光說一個方程組的解答 是可以有分數的。

各位讀者試想, 如果農夫和兒子早先數的結果是頭有1010個, 脚有2821隻 (注意 2821是奇數), 那會如何呢? 顯然 (A1), (A2) 和 (A3) 不可能三個都同時成立吧! 不然在第 II 步驟時我們會得到下面的方程組

$$\begin{cases} x+y=1010 & (1) \\ 2x+4y=2821 & (2) \end{cases}$$

解得 $x=609.5$, $y=400.5$, 那麼這結果就解釋成雞有609又$\frac{1}{2}$ 隻, 而兎子有400 又 $\frac{1}{2}$ 隻, 只有半個頭的兎子或雞可以活嗎? 這一

點也不合乎常理, 所以不是有不正常的雞或兎子, 就是農夫或兒子數錯了, 而這些情況在實際上是常發生的。

各位讀者對數學如何應用的過程已經有了初步的了解, 在下一節我們將開始談一些固定點的現象。

第二節 模型化後的一些數學問題

在前節裡, 我們已經大略了解到如何應用數學去處理各種實際問題的過程, 在這節裡, 我們將舉出幾個常見的模型化後的數學問題。從工程、自然科學及社會科學, 甚至日常生活中的問題, 各自依據該領域的原理 (Principle) 所建立的數學模型, 可說是各色各樣, 在此我們大概列舉下列四種問題:

(a) 方程問題: 求解 $f(x_1, x_2, \ldots x_k) = 0$。

(b) 極值問題 (或最佳化問題): 求 $f(x_1, \ldots, x_k)$, 在 $x_1, x_2, \ldots$ 和 x_k 滿足特定條件下的最大值或最小值。

(c) (偏) 微分方程問題: 了解各種微分方程解的性質, 或者求出它們的解函數。

(d) 矩陣問題: 求一個方形矩陣 A 的冪矩陣 A^k。(例如: Markov Chain 等等)

這些問題各自有它們自己的數學理論; 在本文中我們主要是用一個共同的觀點來描述如何處理這些看似各不相關的課題, 這個觀點即是固定點理論。爲了避免過於複雜的討論, 我們只討論一個變數的問題。相信讀者也能從這個基本的情況, 了解到它們的相通性及一般性。

首先, 我們先說明一下, 在很多情況下問題 (b) 可以轉換成問題 (a)。一個變數的問題 (b) 具有下面的形式:

問題 (b): 當 x 落在區間 $[a, b]$ 裡, 求 $f(x)$ 的極值。

在此, 我們考慮函數 $f(x)$ 是可微分的, 那麼, 從微積分課裡我們知道, 處理問題 (b) 就相當於了解函數 $f(x)$ 的奇點問題, 即求解 $f'(x) = 0$, 這就歸結到問題 (a) 了。接著我們來審視一下問題 (a), 即:

問題 (a): 當 $x \in [a, b]$ 時, 求解 $f(x) = 0$。

當函數 $f(x)$ 是連續時, 我們有以下一個關於解的存在定理:

存在定理: 如果函數 $f(x)$ 是連續的, 且 $f(a)$ 和 $f(b)$ 是異號 (即 一正一負), 那麼, 存在有一數 x_0 介於 a 和 b 之間, 使得 $f(x_0) = 0$。

各位讀者不要小看這個定理, 雖然它淺顯易懂, 但它的應用極廣, 即使在很高深的數學理論中, 也常可見到它的身影。舉個例子來說, 任意給定一個三角形和一條直線, 那麼一定存在一條平行於該線的直線, 將此三角形分成面積相等的兩個區域。各位讀者, 不妨試著用此存在定理, 推想看看。若相信這

是對的, 那麼也請試著用直尺和圓規來找出這條平行線。

另一方面各位可能會問函數 $f(x)$ 一定是連續的嗎? 從筆者的經驗來說, 與自然界或各領域有關的函數十之八九不是連續的就是片段連續的。至於當 $f(x)$ 不是連續時, 那要求解 $f(x)=0$, 幾乎是沒有一般性的方法。或許各位讀者可以想想看!

現在我們打算換一個角度來討論求解的問題, 首先我們分析一下什麼是解呢? 如果我們將此函數 $f(x)$ 當成一個映射 (變換), 那麼它將區間 $[a,b]$ 映射至實數集 R 。

求解 "$f(x)=0$" 就相當於問那些 $x_0 \in [a,b]$ 在變換後會對應到值 0。

從這個觀點來看 "求解 $f(x)=0$" 與 "求解 $f(x)=a$" (a 是個常數) 在本質上並無不同。倒是那些在變換之下是不動的點 x_0, 即 $f(x_0)=x_0$, 反而顯得特殊。從這個固定點的觀念來探討求解問題 $f(x)=0$, 我們可以考慮函數 $g(x)=x+\varepsilon f(x)$, 其中 ε 是個很小且不爲零的實數。

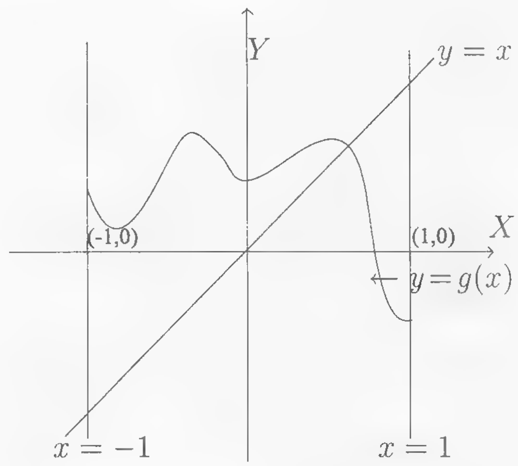
問題 (a): 求解 $f(x)=0$。

就相當於

問題 (A): 找函數 $g(x)$ 的固定點。

爲了方便我們可以假設定義域 $[a,b]=[-1,1]$, 只要實數 $\varepsilon \neq 0$ 夠小, 那麼函數 g 就是個從 $[-1,1]$ 到 $[-1,1]$ 的映射。上面提到的存在定理也就等價於固定點定理: 任何連續函數 $g:[-1,1] \to [-1,1]$ 必定有固定點, 即存在點 $x_0 \in [-1,1]$ 使得 $g(x_0)=x_0$。

從圖形來看, 即 $y=g(x)$ 的軌跡, 必然與直線 $y=x$ 相交。



關於問題 (c) 及 (d), 也可以用固定點的理論來探討, 詳細情況我們留到第四、第五節再談。

第三節　空間決定了固定點的存在

從上一節裡, 我們了解到極值問題與求解問題, 本質上都是找固定點的問題, 在這一節裡, 我們將更深入地探討固定點理論的一些重要內涵。

首先回顧一下連續函數 $g:[-1,1] \to [-1,1]$。關於函數 g 有兩件事是非常重要的:

1. 函數 g 的定義域和值域一樣, 也就是空間 $[-1,1]$。
2. 連續函數g 是一個從空間 $[-1,1]$ 到它自己的映射。

這兩個不同的東西 - 空間與映射 - 對函數 g 來說是最重要的。在這一節和下一節中, 我們將分別從空間和映射的觀點來探討固定點的存在問題。首先我們回顧一下上一節得到的固定點定理。

固定點定理: 任何連續函數
$g:[-1,1]\to[-1,1]$ 必定有一固定點。

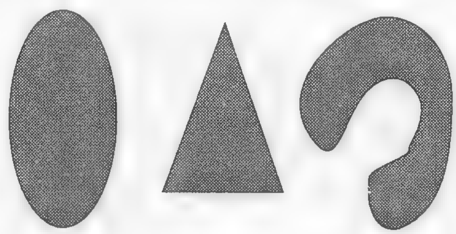
因爲對每一個函數 g 從空間 $[-1,1]$ 到它自己的連續映射都會有固定點, 所以, 具有固定點的性質主要是來自空間 $[-1,1]$ 本身的結構, 而非函數 g 所引起的。譬如空間 $(-\infty,\infty)$ (開集合) 就沒有這個性質了。各位讀者只要考慮函數 $g(x)=x+1$ 就知道了。另外, 我們舉個小朋友常玩的遊戲來進一步說明:

有十位小朋友, 各自坐在自己的位子上, 當老師吹一聲哨子, 大家就再找個位子坐, 大家可以了解的是, 不一定有小朋友會坐在同一位子, 也就是說, 空間 (十個位子) 在變換下 (換位子) 不一定會有固定點。

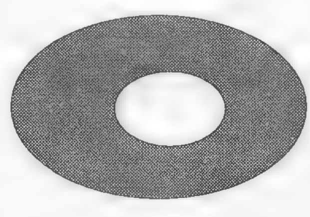
當我們考慮實際問題時, 與問題相關的因素往往不止一項, 所以將其模型化爲數學問題時, 變數 (variable) 就可能不止一個, 因此, 我們也就必須考慮高維度 (例如: 二百維度或二仟維度) 的空間 R^n 了。一般不了解數學或數學應用的讀者, 可能常感困惑地以爲我們只生活在三維的空間 R^3 裡, 爲什麼需要討論高維度呢? 各位讀者, 必須了解在五維度空間裡, 考慮的是有五項變數 (因素), 至於這五項變數所代表的意義是與你所關心的問題有關, 例如: 五種不同物品的價格等等, 考慮五維度空間 R^5, 並不表示我們就必須生活在五度空間裡。剛才所提的固定點定理在高維度時也有類似的結果, 這就是有名的 Brouwer 固定點定理了。

Brouwer 固定點定理: 任何連續函數 $g: D_n\to D_n$ 必定有一固定點。其中 $D_n=\{(x_1,x_2,\ldots,x_n)\in\mathbf{R}^n\mid |x_i|\le 1, i=1,2,\ldots,n\}$ 是 R^n 中的立方體。

同樣地, 固定點的性質是空間 D_n 所與生俱來的。至於固定點的位置則與函數 g 有很大的關聯。要證明這個結果, 必須用到蠻現代的數學知識, 不是一般讀者可以了解的, 所以, 我們在此也不便詳細說明, 以免把大家搞得頭昏腦脹。特別值得一提的是, 不只空間 D_n 有固定點的性質, 只要是它的連續變形也同樣具有這個性質。例如下面這三個在平面上的圖形, 它們是 D_2 的連續變形:



但下面的圖形不具有這個性質



現在我們利用 Brouwer 固定點的定理來說明我們中學時所熟知, 卻不懂得證明的代數基本定理。

代數基本定理: 每一個多項式至少有一複數根, 也就是說, 任何多項式 $P(x)=0$ 至少有一複數解。

表面上看這個定理與我們上面所談的固定點理論一點相似性也沒有, 這種現象對很多讀者來說是不陌生的, 很多人因爲看不出實際問題與數學理論的關聯, 所以不了解數學的有用性及重要性, 而常常用不屑的態度質問數學工作者, "數學有什麼用?" 這實在是很可笑也很悲哀的事啊!

現在言歸正傳, 應用固定點定理要注意的事有二: 第一是須建構一個好的空間 (domain), 第二要有一個從此空間到它自己的連續映射。在代數基本定理的敍述中, 我們想找一個複數解 (注意: 它也可以是實數!), 所以應該從複數平面上去找這個空間 (定義域)。考慮多項式。

$$P(X)=a_nX^n+a_{n-1}X^{n-1}+\ldots+a_nX+a_0.$$

爲了方便, 我們可以假設 $a_n=1$, 並取常數 $R=2+|a_0|+|a_1|+\ldots+|a_n|$, 那麼, 圓盤 D

$$D=\{z \mid |z|\leq R\}.$$

是複數平面的一個子集, 讀者很容易看出它是在 Brouwer 固定點定理中空間 D_2 的連續變形, 所以, 圓盤 D 也具有固定點的性質。接著我們考慮下面函數 g, 它是從 D 到它自己的連續變換:

$$g(z)=\begin{cases} z=\dfrac{P(z)}{Re^{i(n-1)\theta}}, \\ \qquad |z|\leq 1 \quad 且 \quad z=|z|e^{i\theta} \\ z-\dfrac{P(z)}{Rz^{n-1}}, \\ \qquad 1\leq |z|\leq R. \end{cases}$$

我們很容易驗證出函數 g 是連續的, 並且當 $|z|\leq R$ 時, $|g(z)|\leq R$ 所以 g 是個從圓盤 D 到它自己的連續映射。根據 Brouwer 固定點定理, 我們可以在圓盤 D 中找到一點 z_0, 使得 $g(z_0)=z_0$。代入函數 g 的表示式, 不難推出 $P(z_0)=0$。所以代數基本定理是對的。

各位讀者相信聽過 "數學王子" 高斯這個人, 他在現代物理、數學、天文及地理都有很傑出的貢獻, 代數基本定理就是他的博士論文的主要內容之一。不過, 上面所提的形式是用現代的言語來表現的。在高斯 (1777-1855) 年青時還沒有虛數的概念, 這概念是他後來才提出的。請問各位讀者, 如果不用複數, 那麼代數基本定理要如何表達呢? 各位不妨試試看。

第四節 映射決定了固定點的存在

在上一節裡我們說明了有些空間本身就具有固定點的性質, 而有些空間卻不具有, 但這並不表示任何連續函數作用在這些空間就一定沒有固定點, 事實上, 只要所談的函數 (映射) 夠好的話, 也一樣會有固定點。在本節所要探討的好函數是收縮映射 (contraction mappings)。在精確地描述這類函數前, 我們先看看下面的例子來體會一下。

例子: 考慮 R 是所有實數的集合, 我們給定兩個映射 f 和 g, 如下:

$$f(x)=x+1, \quad x\in \mathbf{R}.$$

$$g(x)=\frac{x}{2},\quad x\in\mathbf{R}.$$

很明顯地, 映射 f 沒有固定點, 而映射 g 有一固定點 0, 即 $g(0)=0$。我們來想想是什麼性質造成映射 g 有固定點而映射 f 卻沒有呢? 從幾何 (或距離) 的觀點來說, 對任何兩個實數 x 和 y, 簡單的計算給出

(1) $|f(x)-f(y)|=|x-y|$。 且

(2) $|g(x)-g(y)|=\frac{1}{2}|x-y|$。

在中學時, 我們知道兩數相減的絕對值可以代表為這兩數在直線 R 上的距離, 所以 (1) 式和 (2) 式告訴我們, 映射 f 對直線 R 的作用是保距的, 而映射 g 的作用卻使距離減半。也就是說 g 是個收縮的映射。給定兩個實數 (點) x 和 y, f 作用在 x 和 y 上 k 次後的距離, 仍然是 x 和 y 的距離, 即

(3) $|f^k(x)-f^k(y)|=|x-y|$

而對映射 g 來說, $g^k(x)$ 和 $g^k(y)$ 的距離卻越來越近, 即

(4) $|g^k(x)-g^k(y)|=\frac{1}{2^k}|x-y|$.

所以大家可以了解 (或相信), $g^k(x)$ 會趨近於一個定數 x_0 (在這例子中 $x_0=0$), 且 x_0 是 g 的固定點。

事實上這個例子的性質有其一般性, 這就是有名的收縮映射原理。

收縮映射原理: 如果 X 是一個完備的距離空間 (例如: 有限維的 R^N 及無限維的巴氏空間等), 而 T 是從 X 到它自己的收縮映射, 亦即任意兩點 $x, y\in X$, $T(x)$ 和 $T(y)$ 的距離小於 x 和 y 的距離乘於一固定正數 $\alpha<1$。那麼, 可以得到

(1) 映射 T 有一個唯一的固定點, 我們記作 x_1^*, 即 $T(x^*)=x^*$。

(2) 給定任一點 $x_0\in X$, $\|T^k(x_0)-x^*\|\le\alpha^k\|x_0-x^*\|$, 在此, 記號 $\|x-y\|$ 代表 x 和 y 在X 中的距離。

這個原理在應用上非常重要, 因為從任何點 x 出發, 每經過一次映射那麼 $T(x)$ 就向唯一的固定點 x^* 靠近一點, 並且 $T^k(x)$ 以指數的速度趨近 x^*。通常在處理一個數學化後的實際問題時, 起先我們並不知道其解答的位置。通常給定一個起始點 (initial point), 然後透過映射, 譬如使用 Algorithm 去求解, 跑一個 iteration 就得到另一個點 x_1, 經過 k 次後, 得到 x_k, 我們希望幾次之後就得到答案。但從實際或理論上來說這是不太可能的。所以, 退而求其次希望 x_k 以很快的速度趨近我們所要的答案, 並且能估算出 x_k 與解答 x^* 的可能最大誤差。在微積分課裡, 我們知道用牛頓法來求解 $f(x)=0$ 就是一個相當令人滿意的 Algorithm 了。

接著, 我們談一下如何用收縮映射原理來找出一個微分方程的解。首先在使用這個原理時, 也有兩件事必須注意: 第一我們必須考慮一個適當的空間 X, 第二要構造出一個自然的收縮映射 T, 並且 T 和 X 必須巧妙的配合。如果空間 X 太小了, 那麼 $T(X)$ 可能就不會落在 X 裡面。如果太大了, 映射 T 就很難會是收縮的, 這些都是應用收縮映射原理的困難所在, 所以往往只有專家才能掌握得很好。

考慮微分方程:

$$(*)\qquad \begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = f(x), & x \in [0,1] \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

我們希望找到一個函數 $y = y(x)$ 滿足方程式 $(*)$, 在適當的條件下, 解函數是存在的, 然而在應用上, 我們往往也需要知道解函數 $y = y(x)$ 本身或至少得到它的近似解。上面談到用收縮映射原理時, 有兩樣東西要注意, 即空間 X 及映射 T。

在這個問題裡, 我們考慮 X 是所有在 $[0,1]$上的連續函數 g 而映射 T 是給定如下:

$$T(g)(x)=\int_{x_0}^{x} f(s,g(s))ds+y_0,\ x \in [0,1]。$$

所以, 函數 $T(g)(x)$ 具有性質:

(1) $T(g)(x_0) = y_0$。

(2) $\|T(g_1)(x)-T(g_2)(x)\| \le \alpha\|g_1-g_2\|$

在適當條件下, 常數 α 是個小於 1 的正數, 這兒 $\|\ \|$ 代表 sup norm。所以 $T: X \to X$ 是一個收縮映射。因此, 根據收縮映射原理, 映射 T 有一固定點 (函數), $y^* \in X$ 使得 $T(y^*) = y^*$, 也就是

(3) $T(y^*)(x) = \int_0^{*} f(s,y^*(s))ds + y_0 = y^*(x)$

微積分基本定理告訴我們, 式子 (3) 可以得出

(4) $\dfrac{dy^*}{dx} = f(x)$。

所以 y^* 就是解函數了, 更重要的是, 收縮映射原理也告訴我們, 如果我們從任意一個函數 g 出發 $T^k(g)$ 就以指數的速度趨近解函數 y^*, 所以利用電腦程式來計算, 我們可以計算出 $T^k(g)(a)$ 並估算出 $T^k(g)(a)$ 與 $y^*(a)$ 的可能誤差了。有了這些就能用以了解相關微分方程 $(*)$ 的實際問題了。

第五節 矩陣的計算及特徵向量

在前兩節裡, 大家已大致了解到固定點理論的兩個主要內涵: 好的空間本身決定固定點的存在及好的映射也可決定是否有固定點。並且也明白了很多問題, 即使外在的形式或表達的方式很不同, 可是其數學的本質卻可能是一致的。在這一節裡, 我們也利用固定點的觀念來說明一些矩陣的計算。

在數學各種理論中, 微積分與矩陣理論可說是當代應用最廣的兩門學問, 相信各位讀者對它們都不陌生。其中關於矩陣的應用, 最常遇到的情況就是計算一個方形矩陣 A 的冪矩陣 A^k, 也就是第二節所談到的問題 (d)。

首先我們舉一個較實際的問題來說明爲什麼需要計算冪矩陣 A^k, 譬如, 我們想了解台灣地區未來幾年人口可能分布百分比的情況。爲了方便起見, 我們假設現在 (1995年) 大台北地區 (新竹以北) 的人口占台灣總人口數約 35%, 想要了解十年後該地區的人口是總人口的百分之幾? 大家都知道大台北地區交通及居住環境已相當飽和, 品質也很差, 所以越來越多人願意搬到大台北以外的地區生活。爲使討論簡易起見, 我們不妨假設:

(A1) 每年約有 2% 住在大台地區的人搬離該地區。

(A2) 每年約有 1% 住在大台北地區以外的人搬進大台北地區。

(A3) 出生率與死亡率對人口分佈的百分比影響微乎其微。

根據這些假設, 將此問題數學化後, 我們將得到以下的數學問題:

(1) x_n 代表 n 年後大台北地區的人口百分比。

(2) $A=\begin{pmatrix} 0.98 & 0.01 \\ 0.02 & 0.99 \end{pmatrix}$ 的變換矩陣。

(3) $\begin{pmatrix} x_n \\ 1-x_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} 0.35 \\ 0.65 \end{pmatrix}$.

所以要知道 n 年後大台北地區的人口百分比 x_n, 就相當於計算變換矩陣 A 的冪次方 A^k。

關於冪矩陣 A^k 的計算, 大致分爲兩種情況, 由 k 值的大小來決定, 譬如: $k=2,3$ 甚至 10 以內, 利用矩陣的乘法直接計算 A^2 和 A^3 等等比較省時也較方便, 但當 k 值很大時 (相對於矩陣的維度 n 而言), 那麼就必須考量新的處理方法, 常用的方式是將矩陣三角化, 甚至能夠的話就對角化, 也就是說找一個可逆的矩陣 B 使得$B^{-1}AB$ 變成三角矩陣或對角矩陣。

矩陣的找法必須用到特徵向量 (Eigenvector) 的觀念即找非零向量 v, 使得 $Av=\lambda v$。換句話說, 就是要找出各個在變換 A 之下不動的方向 v, 即 Av 和 v 同方向。如果 A 可以對角化的話, 那麼矩陣 B 的各個行向量就是互爲線性獨立的特徵向量 (不變的方向) 了, 這就是固定點的觀點在矩陣理論中最重要且基本的應用。

現在我們試著找出上面例子中矩陣 A 的特徵向量: 從 $Av=\lambda v$, 我們知道合成矩陣 $(A-\lambda I)$ 將向量 v 映射到零向量, 所以 $A-\lambda I$ 的行列式就等於零, 利用這概念, 我們可以從 $\det(A-\lambda I)=0$, 推出 $\lambda^2-1.97\lambda+0.97=0$, 解得 $\lambda=1$ 或 0.97。由此, 不難得到兩個根所對應的特徵向量。

(4) 當 $\lambda=1$ 時, $v=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$,

(5) 當 $\lambda=0.97$ 時, $v=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

所以 $B=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ 且 $A=B\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.97 \end{pmatrix}B^{-1}$。由此得到

$$\begin{pmatrix} x_n \\ 1-x_n \end{pmatrix} = B\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (0.97)^n \end{pmatrix} B^{-1}\begin{pmatrix} 0.35 \\ 0.65 \end{pmatrix}.$$

代入 $n=10$, 解得 $x_{10}=\frac{1}{3}(1+(0.97)^{10}(0.05))$, 這大約是 34.6%。所以在 (A1)、(A2) 及 (A3) 大致成立之下, 十年後大台北地區的人口約佔台灣總人口的 34.6%, 比現在的百分比 35%, 稍爲下降一點點, 所以十年後, 除非政策上有重大的改變, 否則大台北地區的人口擁擠程度並不會

有太大的改善。各位讀者實在應該認眞考慮是否搬到中南部求發展。

第六節 結語

在本文中, 我們簡單地介紹了數學應用的流程, 並利用固定點的觀點來探討很多不同形態的數學問題。最後想再一次提醒各位讀者, 利用數學處理各種實際問題時, 必須根據各領域的有關學說、理論、事實甚至“假設”來建立數學模型及問題, 在這過程中, 可能本身就無法掌握所有可能的相關因素, 所以數學解答也不必然是實際問題的解答, 因爲, 第一, 我們的假設不一定永遠成立, 第二, 即使所有假設都成立並且數學問題求解的過程也沒有錯誤, 但可能問題出在各相關學說或理論所建立的模型與實際狀況有所差距。雖然有這兩個可能的缺失, 利用數學來處理各種問題的重要性仍然不可小覷, 例如: 選舉前的民意調查等等。有了這些了解, 相信各位讀者以後聽到專家學者的話時, 大可不必全然接受, 反倒要了解他們的模型、理論及假設後, 再做獨立思考和判斷。這正是大家所熟知的「盡信書, 不如無書」的道理了, 這個觀點也是本文所要表達的主要觀念之一。

附記: 非常感謝中正大學數學系助理馬雪珠小姐的繕打及校對。

—本文作者任教於國立中正大學數學系—

機率論爲何要建立在機率空間上面?

蔡聰明

一. 一些問題的提出

機率論是研究隨機現象的學問。它要對隨機現象建立機率模型, 並且求算有趣事件的機率及推演出各種極限定理、機率法則, 研究隨機過程等等。

機率模型長得什麼模樣? 它的理型 (ideas and forms) 是什麼?

今日大家都會說, 機率論的出發點是機率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, 其中 Ω 爲樣本空間 (sample space), 代表隨機實驗的所有可能發生結果; $\mathcal{F}$ 爲事件 (events) 所構成的 σ 代數 (σ-algebra); P 爲一個機率測度 (probability measure), 用來度量事件發生的「確定程度」(the degree of certainty)。「probability」一詞日文翻譯成「確率」, 我國早先的譯名是「或然率」、「概率」, 但目前通行的譯名是更佳的「機率」。

機率空間的理型是怎麼來的呢? 它當然是長久演化與試誤 (trial and error) 的產物, 經過人爲的選擇與創造才得到的。從長期累積的直觀經驗知識 (intuitions) 出發, 提煉出概念 (concepts) 與公理, 最後結晶爲理論 (theory)。事實上, 任何概念或理論都是這樣產生的, 用來承載或組織豐富的、既有的經驗知識, 進一步又可當作開拓新知的根據地。

機率論的公理化醞釀了約30年, 從1900年到1993年, 正值現代數學公理化思潮的高峰期。

機率的概念起源於賭局 (games of chance), 從盤古開天地以來就出現, 長久不斷地累積經驗知識, 一直到1713年 J.Bernoulli 提出弱大數法則, 標誌著數學機率論的誕生。接著又有 De Moivre(1718年) 與 Laplace(1801年) 的中央極限定理, Gauss的誤差之正規分佈律 (1809年) 以及 Poisson 極限定理 (1832年) 等各種機率法則 (the laws of chance) 之獲得, 其中也出現了種種詭論 (paradoxes)。到了1900年, 公理化的時機成熟, Hilbert提出著名的23個問題, 其中第6個就是關於物理學與機率論的公理化問題。於是許多數學家開始嘗試解決機率論的公理化問題, 一方面繼續開拓機率論的領域, 一方面作各種試驗。結果在1933年才由俄國偉大數學家

Kolmogorov(1903-1987年) 完成機率論的公理化 (幾乎跟 Von Neumann 的量子力學公理化同時完成), 提出機率空間的理型作爲機率論的基礎。從此機率論作爲一個數學理論完全確立。Kolmogorov的機率空間模型, 普遍被數學家所接受。在這麼單薄的假設下, 居然開展出那麼豐富的結果, 這是機率論的榮耀。

機率論爲何要採用「機率空間」的理型? 這樣做有什麼優點? 不這樣做又有什麼缺點? 還有沒有其它選擇? 取捨的標準何在?

這些問題都是初學公理化機率論的人最易產生的困惑。如果回答說, 這樣取的「機率空間」是全測度爲1的特殊測度空間, 使得測度與積分論的工具都可以搬過來用, 這只是一個平凡的 (ordinary) 答案, 還是不能解惑。

Lebesgue在 1902-1903 年就創立測度與積分論, 爲什麼要等到1933年 (相差30年) 機率論才完成公理化呢? 因此,「機率空間」的出現必有更深刻的道理存在, 不論是內在的或外在的理由。1900 年到 1933 年之間正是數學家找尋機率模型的試誤與演化階段。

機率空間的出現, 我們分成四個階段來討論: (i) 隨機實驗與命題演算算, (ii) 翻譯成集合論的語言得到初等機率空間之理型, (iii) 用各式各樣的例子來試驗初等機率空間的理型是否合用, (iv) 最後抽取出 Kolmogorov 的機率論公理系統。

本文我們要用一些具體的例子來闡明: 機率空間是公理化機率論的最佳選擇。

二. 初等機率空間的出現

甲. 隨機實驗與命題演算

所謂「隨機實驗」(random experiment) 是指其出現結果有種種可能之實驗, 事先完全無法預料。例如丟一個銅板 100 次就是一個隨機實驗。

對於一個隨機實驗, 我們想知道各種有趣的事象發生的機會大小。這些事象通常以「命題」(propositions) 或「敍述」(statements) 的方式來出現, 例如令 p 表示「正面的次數介於 45 次到 58 次之間」, 這就是關於丟 100 次銅板的隨機實驗之一個事象。我們稱 p 爲一個隨機命題。

古典邏輯所研究的「敍述」都具有明確的眞假值, 不能時眞時假或沒有眞假值, 但是在機率論中的敍述則不然。作隨機試驗下來, 如果丟出 53 次正面, 則 p 成立; 如果丟出 40 次正面, 則 p 不成立。因此, 每一個事象都「說不準」(uncertainty)。衡量一個事象眞確的程度就叫做該事象的機率。

假設 $p, q, r, \cdots$ 爲一族命題, 那麼我們就可以談論命題的三個運算:

名稱	記號	意義
否定	$\sim$	$\sim p$ 表示「p 的否定」之命題
或	$\vee$	$p \vee q$ 表示「p 或 q」, 即 p、q 至少有一個成立之命題
且	$\wedge$	$p \wedge q$ 表示「p 且 q」, 即 p、q同時成立之命題

這三個運算顯然滿足下列運算律:

1. 交換律:

$$p \vee q = q \vee p, \ p \wedge q = q \wedge p$$

2. 結合律:

$$(p \vee q) \vee r = p \vee (q \vee r)$$
$$(p \wedge q) \wedge r = p \wedge (q \wedge r)$$

3. 分配律:

$$p \vee (q \wedge r) = (p \vee q) \wedge (p \vee r)$$
$$p \wedge (q \vee r) = (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$

4. 冪等律:

$$p \vee p = p, \quad p \wedge p = p$$

5. De Morgan 定律:

$$\sim (p \vee q) = (\sim p) \wedge (\sim q)$$
$$\sim (p \wedge q) = (\sim p) \vee (\sim q)$$

6.雙否定律:

$$\sim (\sim p) = p$$

7. 兩值律:

$$p \vee (\sim p) = 1, \quad p \wedge (\sim p) = 0$$

其中1表恆眞命題,0表恆假命題。

8. 0與1的特性:

$$p \vee 0 = p, \quad p \wedge 0 = 0$$
$$p \vee 1 = 1, \quad p \wedge 1 = p$$

定義:一族命題 $\mathcal{A}$ 滿足上述八條運算律就叫做一個 Boole 代數 (Boolean algebra), 記爲 $\langle \mathcal{A}, \sim, \vee, \wedge, 0, 1 \rangle$。

註: Boole(1815-1864) 是自學成功的典範, 他在1854年出版 “An investigation of the laws of thought”一書, 引入命題演算, 嘗試將邏輯代數化。B. Russell 稱譽說:「純數學是 Boole 發明的。」

乙. 翻譯成集合論的語言: 初等機率空間

G. Cantor(1845-1918) 創立集合論, 堪稱爲「數學的法國大革命」。這是他追究「無窮」的產物。現代數學的特色之一, 就是一切都要化成集合論的語言來表達。

對於任意非空集 Ω, 令 2^Ω 表示 Ω 的所有子集全體, 將 $\sim$、$\vee$、$\wedge$ 分別解釋爲取補集 c、取聯集 $\cup$、取交集 $\cap$ 之操作, 再取 $0 = \emptyset$, $1 = \Omega$, 則 $\langle 2^\Omega, c, \cup, \cap, \emptyset, \Omega \rangle$ 形成一個 Boole 代數。反過來, M.H. Stone (1963年) 證明: 對於任何 Boole 代數 $\mathcal{A}$, 必可找到一個集合 Ω, 使得 $\mathcal{A}$ 中的命題表現爲 Ω 的子集, 並且 $\sim$、$\vee$、$\wedge$ 表現爲集合運算 c、$\cup$、$\cap$, 而成爲 2^Ω 的一個 Boole 子代數。

對於一個隨機實驗的一族隨機命題所成的 Boole 代數 $\mathcal{A}$, 令 Ω 表示實驗的所有可能結果之集合, 將每個命題 p 表現成 Ω 的子集 A , 亦即使 p 成立的元素所成之集, 叫做 p 的眞值集 (truth set), 如下列的對照表:

命題	眞值集
1	Ω
0	$\emptyset$
p	A
q	B
$\sim p$	A^c
$p \vee q$	$A \cup B$
$p \wedge q$	$A \cap B$
$\mathcal{A}$	$\mathcal{A}$

顯然, $\mathcal{A} \subset 2^{\Omega}$ 並且滿足下列性質:

(i) $\Omega \in \mathcal{A}$

(ii) $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c \in \mathcal{A}$

(iii) $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{A}$

亦即 $\mathcal{A}$ 包含有宇集 Ω, 並且在取補集與聯集下具有封閉性。我們稱這樣的 $\mathcal{A}$ 爲一代數 (algebra), 其元素叫做事件 (events)。如果 $A \cap B = \emptyset$, 則稱 A、B 爲互斥 (disjoint) 事件。

接著是對每一個事件 $A \in \mathcal{A}$ 引入機率 P(A), 我們自然要求它滿足:

(i) 正性: $0 \leq P(A) \leq 1$, $\forall A \in \mathcal{A}$

(ii) 歸一性: $P(\Omega) = 1$

(iii) 加性: 若 A,$B \in \mathcal{A}$ 爲互斥事件, 則

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

我們稱 P 爲一個初等機率測度 (an elementary probability measure)。

定義: 一個初等機率空間 (an elementary probability space) 是指三合一空間 $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, 其中

(i) Ω 爲一個非空集, 叫做樣本空間;

(ii) $\mathcal{A} \subset 2^{\Omega}$ 爲一個代數, 表事件全體;

(iii) P 爲一個初等機率測度。

註: 此地的初等機率測度與初等機率空間之用語, 我們根據的是 Itô [13] 的書。改採「擬機率測度」與「擬機率空間」, 也是很好的用語。

初等機率空間是對一個隨機實驗去蕪存菁後的初步總結, 是一個很自然的機率模型。這個理型是否足以承載豐富的機率結果呢? 在既知的結果中, 最重要的是 Bernoulli 的弱大數法則、De Moivre-Laplace 的中央極限定理以及 Borel 的強大數法則。這些都可以生存在初等機率空間上面嗎?

三. 初等機率空間的試驗

Bernoulli的弱大數法則起源於要澄清:「丟一個公正銅板, 出現正面的機率是 1/2」這句話的意思。

爲此, 考慮在相同狀況下, 獨立地丟一個公正銅板 n 次之隨機實驗。我們爲其建立初等機率空間 $(\Omega_n, \mathcal{A}_n, P_n)$ 如下:

$$\Omega_n = \{\omega = (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n) : \omega_k = H \text{ 或 } T\}$$

其中 H 表正面 (head),T 表反面 (tail);

$$\mathcal{A}_n = 2^{\Omega_n}$$

由於每一樣本點的機會均等, 故對每一個 $\omega \in \Omega_n$, 指定

$$P_n(\omega) = \frac{1}{2^n}$$

從而, 對 $A \in \mathcal{A}_n$ 指定

$$P_n(A) = \frac{\#A}{2^n}$$

其中 $\#A$ 表示事件 A 所含的樣本點個數。

定義「隨機變數」(random variables)

$$\xi_k : \Omega_n \to \{0, 1\}$$

如下: 對於 $k = 1, 2, \ldots, n$, 令

$$\xi_k(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{當 } \omega_k = H \text{ 時} \\ 0, & \text{當 } \omega_k = T \text{ 時} \end{cases}$$

我們稱 $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ 爲一個 (有限的) 銅板序列。再令

$$S_n = \xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_n$$

則容易證得下面兩個定理:(參見 [2])

定理1: (Bernoulli弱大數法則) 對於任意 $\varepsilon > 0$, 恆有

$$\lim_{n\to\infty} P_n(|\frac{S_n}{n} - \frac{1}{2}| \le \varepsilon) = 1 \qquad (1)$$

定理2: (De Moivre-Laplace 中央極限定理) 對任意 $x \in R$, 恆有

$$\lim_{n\to\infty} P_n(\frac{S_n - n/2}{\sqrt{n}/2} \le x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-u^2/2} du \qquad (2)$$

因此, 初等機率空間的理型可以承載 Bernoulli 弱大數法則與 De Moivre-Laplace 中央極限定理。初步看起來, 似乎很不錯。這會是我們所要追尋的理型嗎?

再試驗 Borel 的強大數法則, 這必須涉及無窮多次丟銅板, 即銅板序列 (coin-tossing sequence)。

定義: 設 $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ 爲一個初等機率空間。如果 $X_1, X_2, X_3 \ldots$ 爲定義在 $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ 上, 取值 $\{0, 1\}$ 的一列隨機變數, 滿足下列兩個性質:

(i) 同佈性: 對任意自然數n,

$$P(X_n = 0) = \frac{1}{2} = P(X_n = 1)$$

(ii) 獨立性: 對任意有限多個自然數 $i_1 < i_2 < \cdots < i_m$ 與由 $0, 1$ 所成的有限數列 $j_1, j_2, \ldots, j_m$

$$\begin{aligned} & P(X_{i1} = j_1, \ldots, X_{im} = j_m) \\ = \ & P(X_{i1} = j_1) \ldots P(X_{im} = j_m) \end{aligned}$$

則稱 (X_n) 爲一個銅板序列。

我們建造「丟無窮多次銅板」的初等機率空間及銅板序列如下:

取樣本空間

$$\Omega_\infty = \{\omega = (\omega_1, \omega_2, \ldots) : \omega_k = H \text{ 或 } T\}$$

對於 $A \subset \Omega_n$, 令

$$C_A = \{\omega \in \Omega_\infty : (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n) \in A\}$$

表示以 A 爲底在 Ω_∞ 中的「柱集」(cylinder set)。令

$$\mathcal{A}_\infty = \{C_A : A \in \mathcal{A}, n \in \mathbf{N}\}$$

表示柱集的全體, 這是一個代數。對 $C_A \in \mathcal{A}_\infty$, 定義

$$P_\infty(C_A) = P_n(A) = \frac{\#A}{2^n}\text{。}$$

初等機率空間 $(\Omega_\infty, \mathcal{A}_\infty, P_\infty)$ 之建構只不過是將有窮多次丟銅板的一連串初等機率空間 $(\Omega_n, \mathcal{A}_n, P_n)$, $n \in \mathbf{N}$ 嵌入而已。

接著, 在 Ω_∞ 上定義無窮多個隨機變數:

$$\xi_k(\omega) = \begin{cases} 1, & 若\ \omega_k = H\ , \\ 0, & 若\ \omega_k = T\ , \end{cases}$$

$k = 1, 2, \ldots$。容易驗知 (ξ_n) 為一個銅板序列。令

$$S_n = \xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_n$$

所謂 Borel 的強大數法則是指

$$P_\infty(\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} = \frac{1}{2}) = 1 \qquad (3)$$

這成立嗎? 讓我們作分析。令事件

$$B = \{\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} = \frac{1}{2}\}$$

則

$$\begin{aligned} B &= \bigcap_{\varepsilon>0} \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{n=k}^{\infty} \{|\frac{S_n}{n} - \frac{1}{2}| < \varepsilon\} \\ &= \bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{n=k}^{\infty} \{|\frac{S_n}{n} - \frac{1}{2}| < \frac{1}{m}\} \end{aligned}$$

再令

$$\begin{aligned} B_{lk}^m &= \bigcup_{n=k}^{l} \{|\frac{S_n}{n} - \frac{1}{2}| < \frac{1}{m}\} \\ B_n^m &= \{|\frac{S_n}{n} - \frac{1}{2}| < \frac{1}{m}\} \end{aligned}$$

則顯然有

$$B_{lk}^m \overset{l\to\infty}{\downarrow} \bigcap_{n=k}^{\infty} B_n^m \overset{k\to\infty}{\uparrow} \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{n=k}^{\infty} B_n^m \overset{m\to\infty}{\downarrow} B \qquad (4)$$

其中只有 $B_{lk}^m \in \mathcal{A}_\infty$, 其餘的都經過了取單調極限, 故都不屬於 $\mathcal{A}_\infty$。因此 (3) 式的左項沒有意義, 亦即在 $(\Omega_\infty, \mathcal{A}_\infty, P_\infty)$ 上無法承載 Borel 強大數法則。這顯示初等機率空間的理型似乎不夠用, 尤其是涉及樣本空間為無窮集的情形。

這並沒有十足的說服力, 因為對於一個銅板序列, 初等機率空間的造法可以有各種方式, 也許換個造法就可使 Borel 的強大數法則成立。

下面我們舉一個奇妙的例子, 這是從 [3] 一文中取出來的。考慮從自然數集 $\mathbf{N}$ 中任取出一數的隨機實驗。我們可以造一個初等機率空間, 並且在其上定義出各種銅板序列, 其中有的使 Borel 強大數法則不成立, 也有的使 Borel 強大數法則成立。

從 $\mathbf{N}$ 中任取一數的隨機實驗, 原則上, 每一數被取到的機會均等, 但是由於 $\#\mathbf{N} = \infty$, 故無法對每一點指定相等的機率。我們退而求其次, 造一個機率模型保住大家都接受的常識就好了:

從 $\mathbf{N}$ 中任取一數, 那麼

(i) 取到偶數的機率是 $\frac{1}{2}$, 取到奇數的機率也是 $\frac{1}{2}$;

(ii) 取到 5 的倍數之機率是 1/5;

(iii) 取到 99 的機率是 0;

(iv) 取到的數小於 1000 的機率是 0;

(v) 取到的數落在等餘類 (congruence class)

$$A(n, r) = \{\omega \in \mathbf{N} :\ \omega\ 除以\ n\ 餘\ r\}$$

之中的機率是 $\frac{1}{n}$, 其中 $n \in \mathbf{N}$, $r = 0, 1, \ldots, n-1$。

我們先造一個保住常識 (v) 的初等機率空間:

取樣本空間 $\Omega=\mathbf{N}$, , 事件全體 $\mathcal{R}$ 爲有窮多個等餘類之聯集全體。容易驗知 $\mathcal{R}$ 爲一個代數, 並且存在唯一的初等機率測度 P, 定義在 $\mathcal{R}$ 上, 使得

$$P(A(n,r))=\frac{1}{n}$$

因此, $(\Omega,\mathcal{R},P)$ 爲一個初等機率空間。

其次, 定義銅板序列: 對於 $\omega\in\mathbf{N}$, 用二進位法唯一展開成

$$\omega=\alpha_1\cdot 2^0+\alpha_2\cdot 2^1+\alpha_3\cdot 2^2+\cdots$$

上式右邊只含有限項, 其中 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots$ 皆爲 0或 1, 於是 ω 表成二進位法爲

$$\omega=\cdots\alpha_3\alpha_2\alpha_1$$

定義隨機變數

$$X_n(\omega)=\alpha_n, n\in\mathbf{N}$$

設 $i_1,i_2,\ldots,i_n$ 爲 0 或 1 所成的序列, 令

$$i_ni_{n-1}\cdots i_1=i_1\cdot 2^0+i_2\cdot 2^1+\cdots+i_n\cdot 2^{n-1}$$

則易驗知

$$\begin{aligned}\{\ &\omega\in\mathbf{N}:X_1(\omega)=i_1,\ldots,X_n(\omega)=i_n\}\\ =\ &A(2^n,i_ni_{n-1}\ldots i_1)\end{aligned}$$

從而 (X_n) 爲定義在 $(\Omega,\mathcal{R},P)$ 上的一個公正的銅板序列。

對於任意 $\omega\in\mathbf{N}$, 存在自然數 k_0, 使得對所有 $k\geq k_0$。有

$$\alpha_k=X_k(\omega)=0。$$

於是

$$P(\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n}=0)=P(\Omega)=1$$

從而 Borel 強大數法則不成立, 事實上 $\{\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n}=\frac{1}{2}\}=\emptyset$。

更有趣的是, 在同樣的初等機率空間 $(\Omega,\mathcal{R},P)$ 上, 定義隨機變數

$$Y_n=\begin{cases}X_n, & \text{當 } n \text{ 爲偶數時},\\ 1-X_n, & \text{當 } n \text{ 爲奇數時},\end{cases}$$

則易驗知 (Y_n) 仍然爲一個銅板序列, 並且 Borel 強大數法則成立:

$$P(\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n}=\frac{1}{2})=P(\Omega)=1$$

進一步, 如果取 $i_1,i_2,\ldots$ 爲 0 與 1 所組成的數列, 使得極限 $\lim_{n\to\infty}\frac{i_1+i_2+\cdots+i_n}{n}$ 不存在, 定義

$$Z_n=\begin{cases}X_n, & \text{若 } i_n=0,\\ 1-X_n, & \text{若 } i_n=1,\end{cases}$$

則 (Zn) 也是一個銅板序列, 並且

$$P(\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n}\text{ 不存在})=P(\Omega)=1$$

對於任何有理數 α, $0\leq\alpha\leq 1$ 都可以在 $(\Omega,\mathcal{R},P)$ 上造一個銅板序列, 使得

$$P(\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n}=\alpha)=1$$

初等機率空間 $(\mathbf{N},\mathcal{R},P)$ 雖然奇妙, 但還是有所不足。例如單身集等, $\{2\}$、$\{7\}$ 等, 以及 $\mathbf{N}$ 的任何有限子集都不屬於 $\mathcal{R}$ 。因此, 它並沒有保住所有的常識。

一個改進之道是擴大 $\mathcal{R}$, 並且延拓 P, 這就是下面要介紹的更重要的一個例子。

對於任意子集 $A \subset \mathbf{N}$ 及 $m \in \mathbf{N}$, 令

$$A[m] = \{k : 1 \leq k \leq m, k \in A\}$$

如果極限 $\lim_{m\to\infty} \frac{\#A[m]}{m}$ 存在, 則記此極限值爲 $P^*(A)$, 叫做 A 的算術密度 (arithmetical density)。令

$$\mathcal{D} = \{A \subset \mathbf{N} : \lim_{n\to\infty} \frac{\#A[m]}{m} \text{ 存在}\}$$

表示所有具有算術密度的子集全體。於是得到一個三合一空間 $(\mathbf{N}, \mathcal{D}, P^*)$, 這是機率式數論 (probabilistic number theory) 的出發點, 結果豐碩。

命題1: (i) $\mathbf{N}$ 中的單身集與有窮子集皆屬於 $\mathcal{D}$ 且其機率爲 0。

(ii) 等餘類$A(n, r) \in \mathcal{D}$ 且

$$P^*(A(n,r)) = \frac{1}{n}$$

因此,$(\mathbf{N}, \mathcal{D}, P^*)$ 是 $(\mathbf{N}, \mathcal{R}, P)$ 的延拓。

證明: (i) 是顯然的。

(ii) 令 $A = A(n,r)$, 則

$$\frac{m}{n} - 1 < \#A[m] = [\frac{m}{n}] \leq \frac{m}{n}$$

$$\text{所以}\frac{1}{n} - \frac{1}{m} < \frac{\#A[m]}{m} \leq \frac{1}{n}$$

令 $m \to \infty$, 得到 $P^*(A(n,r)) = \frac{1}{n}$。因此,$A(n,r) \in \mathcal{D}$。

因此, 上述在 $(\mathbf{N}, \mathcal{R}, P)$ 上所定義的各式各樣的銅板序列都可搬到 $(\mathbf{N}, \mathcal{D}, P)$ 上來, 仍然具有相同的奇異性質。

命題2:

(i) $\emptyset, N \in \mathcal{D}$ 且 $P^*(\emptyset) = 0, p^*(N) = 1$,

(ii) $A \in \mathcal{D} \Rightarrow A^c \in \mathcal{D}$, 且 $P^*(A^C) = 1 - P^*(A)$,

(iii) $A, B \in \mathcal{D}$ 且 $A \subset B \Rightarrow B \backslash A \in \mathcal{D}$,

(iv) $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathcal{D}$ 且兩兩互斥 $\Rightarrow \bigcup_{k=1}^n A_k \in \mathcal{D}$。

證明:(i) 與 (iv) 是顯然的。

(ii)$A \in \mathcal{D}$, 由於 $\#A^c[m] = m - \#A[m]$, 故

$$\lim_{m\to\infty} \frac{\#A^c[m]}{m} = \lim_{m\to\infty} \frac{m - \#A[m]}{m} = 1 - \lim_{m\to\infty} \frac{\#A[m]}{m}$$

今因 $\lim_{m\to\infty} \frac{\#A[m]}{m}$ 存在, 所以 $\lim_{m\to\infty} \frac{\#A^c[m]}{m}$ 也存在, 並且

$$P^*(A^c) = 1 - P(A)\text{。}$$

(iii) 設 $A, B \in \mathcal{D}$ 且 $A \subset B$ 則

$$\#(B\backslash A)[m] = \#B[m] - \#A[m]$$

$$\text{所以} \lim_{m\to\infty} \frac{\#(B\backslash A)[m]}{m} = \lim_{m\to\infty} \frac{\#B[m]}{m} - \lim_{n\to\infty} \frac{\#A[m]}{m} \text{ 存在,}$$

於是 $B \backslash A \in \mathcal{D}$。 #

註: 上述命題中的 (iv),「兩兩互斥」不能放棄, 有限聯集也不能改爲可列聯集。

命題3: $\mathcal{D}$ 不是一個代數, 更不是一個 σ 代數。

我們只需舉出 $E, F \in \mathcal{D}$, 但是 $E \cap F \notin \mathcal{D}$ 就好了。

取 E 爲奇數集、再取

$$F = \{[2^{2n}, 2^{2n+1}] \text{ 中的奇數與 } [2^{2n+1}, 2^{2n+2}] \text{ 中的偶數}, n \geq 0\}$$

則 $E = A(2,1) \in \mathcal{R} \subset \mathcal{D}$ 且 $P^*(E) = P(E) = \frac{1}{2}$。

其次證 $F \in \mathcal{D}$。首先觀察到, 對任意 $n \in \mathbf{N}$、存在 $n \in \mathbf{N}$ 使得 $m \in [2^{2n}, 2^{2n+1}]$, 並且當 $m \to \infty$ 時,$n \to \infty$。

在 $[1,2]$ 中有一個奇數, 在 $[2^{2n}, 2^{2n+1}]$ 中有 2^{2n-1} 個奇數, $n = 1,2,3,\ldots$; 在 $[2^{2n}, 2^{2n+1}]$ 中有 $2^{2n}+1$ 個偶數, $n = 0,1,2,\ldots$。於是

$$\begin{aligned}
&[1+(2^0+1)+2^1+(2^2+1)+\cdots \\
&\quad +2^{2n-3}+(2^{2n-2}+1)]/(2^{2n}+1) \\
\geq\ & \frac{\#F[m]}{m} \\
\geq\ & [1+(2^0+1)+2^1+(2^2+1)+\cdots \\
&\quad +2^{2n-1}+(2^{2n}+1)]/(2^{2n+2})
\end{aligned}$$

亦即

$$\begin{aligned}
&\frac{2^{2n-1}+n+2}{2^{2n}} \geq \frac{2^{2n-1}+n+2}{2^{2n}+1} \\
\geq\ & \frac{\#F[m]}{m} \geq \frac{2^{2n-1}+n+2}{2^{2n+2}} \\
&\frac{1}{2}+\frac{n+2}{2^{2n}} \geq \frac{\#F[m]}{m} \geq \frac{1}{2}+\frac{n+2}{2^{2n+2}}
\end{aligned}$$

由夾擠原理知

$$\lim_{m\to\infty} \frac{\#F[m]}{m} = \frac{1}{2}$$

因此 $F \in \mathcal{D}$。

考慮 $E \cap F = \{[2^{2n}, 2^{2n+1}]\}$ 中的奇數, $n = 0,1,\ldots\}$。我們要證明 $\lim_{m\to\infty} \frac{\#(E\cap F)[m]}{m}$ 不存在。利用歸謬法, 如果該極限存在, 則取子序列也收歛到同一値。今取 $a_n = 2^{2n+1}$, $b_n = 2^{2n+2}$,

則

$$\begin{aligned}
\#(E\cap F)[a_n] &= \#(E\cap F)[b_n] \\
&= 2^1+2^3+\cdots+2^{2n-1},
\end{aligned}$$

所以

$$\frac{\#(E\cap F)[a_n]}{a_n} = \frac{1}{3} - \frac{1}{3\cdot 2^{2n}}$$

$$\frac{\#(E\cap F)[b_n]}{b_n} = \frac{1}{6} - \frac{1}{3\cdot 2^{2n+1}}$$

從而

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} \frac{\#(E\cap F)[a_n]}{a_n} = \frac{1}{3} \neq \frac{1}{6} \\
=\ & \frac{\#(E\cap F)[b_n]}{b_n}, \text{ 矛盾。}
\end{aligned}$$

於是 $E \cap F \notin \mathcal{D}$。 #

因此, $(\mathbf{N}, \mathcal{D}, P^*)$ 既不是初等機率空間, 更不是機率空間。但是, 它依然可以承載許多數論上的結果。參見 Kac 的小書 [7]。

總結上述的例子:

甲、在初等機率空間 $(\Omega_n, \mathcal{A}_n, P_n), n = 1,2,\ldots,$ 上可承載 Bernoulli弱大數法則與 De Moivre-Laplace 中央極限定理 。

乙、在初等機率空間 $(\Omega_\infty, \mathcal{A}_\infty, P_\infty)$ 上

$$\{\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} = \frac{1}{2}\} \notin \mathcal{A}_\infty$$

丙、在初等機率空間 $(\mathbf{N},\mathcal{R},P)$ 或非初等機率空間 $(\mathbf{N},\mathcal{D},P^*)$ 上可以定義各式各樣的銅板序列, 使得

$$\{\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n}=\frac{1}{2}\}=\emptyset;\{\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n}=\frac{1}{2}\}=\Omega;$$

$$\{\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n}=\alpha\}=\Omega,\forall\alpha \text{ 爲有理數},$$

$$0\le\alpha\le 1;$$

$$\{\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n}\text{ 不存在}\}=\Omega.$$

Borel的強大數法則可以成立, 也可以不成立, 堪稱「百花齊放」, 結果繁多。

四. Lebesgue 空間上的機率論之試驗

自從 Lebesgue 創立測度與積分論後,Lebesgue 空間 $((0,1],\mathcal{L},\mu)$ 就一直被當作是開發機率論 (乃至分析學) 的絕佳空間, 其中 $\mathcal{L}$ 爲 $(0,1]$ 中 Lebesgue 可測集全體,μ 爲 Lebesgue 測度。

首先是定義出銅板序列。對於任意 $\omega\in(0,1]$, 作二進位法展開。

$$\omega=0.\xi_1(\omega)\xi_2(\omega)\xi_3(\omega)\cdots$$

其中每個 $\xi_n(\omega)$ 都是 0 或 1。有的數有兩種展開法, 例如

$$\frac{1}{2}=0.1000\cdots=0.0111\cdots$$

我們就規定取後者。於是 (ξ_n) 就是定義在 Lebesgue 空間 $((0,1],\mathcal{L},\mu)$ 上的一個銅板序列。令 $S_n=\xi_1+\cdots+\xi_n$。

再令 $r_n(\omega)=2\xi_n(\omega)-1, n=1,2,\ldots,$ 則 r_n 取値 -1 與 $+1$, 叫做 Rademacher 函數。

利用分析學工具, 我們就可以證得下列諸定理:

定理 B: (Borel強大數法則, 1909年)

$$\mu(\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n}=\frac{1}{2})=1$$

對於 S_n 的漲落 (fluctuation) 之研究, 有一系列的結果, 最後導致重覆對數法則 (Law of the iterated logarithm) 的產生。爲方便起見, 下面令 $S_n=r_1+r_2+\cdots+r_n$, 則 Borel 的強大數法則可以改述成:

$$S_n=o(n)\quad \text{a.s.(殆遍)}$$

由此當然可得

$$S_n=O(n)\quad \text{a.s.}$$

進一步, 我們有:

定理4: (Khinchine重覆對數法則,1924年)

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{S_n}{\sqrt{2n\ln\ln n}}=1,\ \text{a.s.}$$

註: 在1929年 Kolmogorov 再推廣到一般獨立隨機變數列的情形。

Steinhaus與 Wiener 在1922年提出一個問題: 在調和級數 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots$ 每一項之前以丟銅板來加正、負號, 討論其斂散行爲。這個問題是往後獨立隨機變數和 (sum of independent ramdom variables) 及隨

機積分 (Wiener 積分與 Itô 積分) 理論的發源地。

定理 5: (Rademacher, 1922; Kolmogorov 與 Khinchine, 1924)
設 $\sum_{n=1}^{\infty} C_n$ 爲一個複數項之級數, 則

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n r_n \text{ 殆遍收斂} \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} |C_n|^2 < \infty。$$

復次,Wiener 在1923年將 (S_n) 作連續化 (考慮銅板越丟越快, 步幅越來越小), 在 Lebesgue 空間上建構出 Wiener 過程 $(W(t))t \geq 0$ (或叫做 Brown 運動)。這是最重要的一個隨機過程, 是整個現代隨機過程論的出發點。

結論是: 在 Lebesgue 空間上開展的機率論相當成功。

五. 回顧與前瞻

欲承載 Borel 的強大數法則, 是機率論公理化的著眼關鍵。Borel 當初建立這個結果是在 Lebesgue空間上做出來的, 而 Lebesgue 空間是典型的機率空間。

如果改用正準建構 (canonical construction) 的初等機率空間 $(\Omega_\infty, \mathcal{A}_\infty, P_\infty)$ 來看, 我們發現

$$B \equiv \{\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} = \frac{1}{2}\} \notin \mathcal{A}_\infty$$

$\mathcal{A}_\infty$ 太小了, 事件 B 無處容身。顯然 B 生存在由 $\mathcal{A}_\infty$ 所生成的單調類 (monotone class) $m(\mathcal{A}_\infty)$ 之中。由單調類定理 (monotone class thesrem) 知, 代數 $\mathcal{A}_\infty$ 所生成的單調類 $m(\mathcal{A}_\infty)$ 就是其所生成的 σ 代數 $\sigma(\mathcal{A}_\infty)$。換言之, $B \in \sigma(\mathcal{A}_\infty)$。另一方面, 由測度論知, P_∞ 可以唯一延拓到 $\sigma(\mathcal{A}_\infty)$ 上, 成爲一個機率測度, 仍記爲 P_∞, 使得 $(\Omega_\infty, \sigma(\mathcal{A}_\infty), P_\infty)$ 爲一個機率空間, 並且在其上 Borel 強大數法則成立。

進一步, 對於在任何機率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上的銅板序列, 同樣都可以證明 Borel 強大數法則成立。

但是對於初等機率空間 $(\mathbf{N}, \mathcal{R}, P)$, 卻可在其上定義各種的銅板序列, 使得 Borel 強大數法則有時成立, 有時不成立。成立與否跟隨機變數的函數本身有關, 而不只是依賴於隨機變數的機率分佈。這是初等機率空間的致命傷。

理想的機率論應該只依賴於隨機變數的機率分佈, 而跟隨機變數作爲函數本身的對應取値 無關 (不妨叫做機率論的不變性理論觀點), 這在機率空間上發展出的機率論確實如此。

六. Kolmogorov 的公理系統

總結上述,Kolmogorov 在1933年提出機率空間的理型作爲機率論的基礎, 這是順理成章的最佳選擇。

Kolmogorov按兩個階段來建立機率論的公理系統:

甲、樣本空間 Ω 是有窮集的情形

此時初等機率空間 $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ 的理型就夠用, 通常取 $\mathcal{A} = 2^{\Omega}$。這含蓋了所有 Laplace 型的古典機率空間。

乙、樣本空間 Ω 是無窮集的情形

仍然取初等機率空間 $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ 作爲模型, 但是進一步要求 P 具有連續性:

$$(A_n) \subset \mathcal{A} \text{ 且 } (A_n) \downarrow \emptyset \text{ (遞降至空集)}$$
$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} P(A_n) = 0 \tag{5}$$

根據測度論,(5) 式等價於 P 具有可列加性 (σ-additrvity):

$$(A_n) \in \mathcal{A} \text{ 兩兩互斥且 } \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$$
$$\Rightarrow P(\bigcup_{n=1}^{\infty}) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) \tag{6}$$

從而 P 可以唯一延拓到由 $\mathcal{A}$ 所生成的 σ 代數 $\sigma(\mathcal{A})$ 上, 仍記爲 P, 而得到機率空間 $(\Omega, \sigma(\mathcal{A}), P)$ 。整個機率論就在這個延拓的機率空間上順利地開展。

因此, 機率論的基礎就是機率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 定義如下:

定義: 設 Ω 爲一個非空集。如果 $\mathcal{F} \subset 2^{\Omega}$ 滿足:

(i) $\Omega \in \mathcal{F}$,

(ii) $A \in \mathcal{F} \Rightarrow A^c \in \mathcal{F}$,

(iii) $(A_n) \subset \mathcal{F} \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$, 則稱 $\mathcal{F}$ 爲 Ω 上的一個 σ 代數。如果 $P: \mathcal{F} \to R_+ = [0, \infty)$ 滿足:

(iv) $0 \leq P(A) \leq 1, \forall A \in \mathcal{F}$,

(v) $P(\Omega) = 1$,

(vi) $(A_n) \subset \mathcal{F}$, 兩兩互斥 $\Rightarrow P(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$,

則稱 P 爲 $\mathcal{F}$ 上的一個機率測度。如果 $\mathcal{F}$ 爲 Ω 上的一個 σ 代數, P 爲 $\mathcal{F}$ 上的一個機率測度, 那麼三合一空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 就叫做一個機率空間。

七. 結語

Kolmogorov說:「在描述任何可觀測的隨機過程時, 我們只得到初等機率空間的資料, 而延拓的機率空間只是實際隨機過程的一種理想化。我們“任意地”(arbitrarily) 劃定滿足公理 (5) 的系統作爲機率模型。這個限制, 在各種研究中, 我們發現是適當的且方便的。」

在 Kolmogorov 的公理系統之下, 三合一空間 $(\mathbf{N}, \mathcal{R}, P)$ 與 $(\mathbf{N}, \mathcal{D}, P^*)$ 都是「化外之民」, 因爲顯然它們都不能延拓成爲機率空間。但是它們並不失其重要性。Kolmogorov 說他的公理系統是「任意地」割捨, 這很高明地保留一個活結, 使得非機率空間上的機率論仍然有研究的餘地。畢竟機率論是一種數學理論, 但是它跟經驗世界又具有密切關係。有一個時期, 機率論被看作是介於物理學 (或哲學) 與數學之間的一門學問。

放棄較自然與直觀的初等機率空間, 改採較局限的機率空間, 倒不是因爲初等機率空間不足以承載機率論, 而是承載的東西花樣繁多, 有的甚至違背了常識。作局限使得事情單純化, 而不失其豐富性。由代數 $\mathcal{A}$ 延拓爲 σ 代數 $\sigma(\mathcal{A})$, 相當於從有理數系 Q 延拓爲實數系 R, 多出了許多經驗世界接觸不到

的事件, 但是對於澄清經驗世界卻大有用處。某種理想化、連續化、無窮化是「了解」的必要手段, 這是機率論給我們的啓示。

參考資料

1. 楊維哲: 機率論, 台北, 正中書局, 1979年。
2. 蔡聰明: 什麼是機率與機率法則? 數學傳播, 十九卷一期, 1995。
3. W.D. Sudderth and S. Ramakrishnan: A sequence of coin toss variables for which the strong law fails. Amer. Math. Monthly, 939-941, 1988。
4. A. N. Kolmogorov: Foundations of the theory of probability, Chelsea, New York, 1956。
5. L. Breimam: Probability. Addison-Wesley, 1968。
6. K. Itô :Introduction to probability theory, Cambridge Univ. Press, 1984。
7. M. Kac: Statistical independence in probability, Analysis and number theory, Carus Math. Monographs 12, 1959。
8. J. Barone and A. Novikoff: A History of the axiomatic formulation of probability from Borel to Kolmogorov, Part I. Arch. Hist. Exact Sci. 18, 123-190, 1978。
9. H. Royden: Real Analysis, third Edition, McMillan, 1988。
10. L.E. Maistrov: Probability theory, A Historcal Sketch, Academic press, 1974.

—本文作者任教於台灣大學數學系—

數學美賞析 (下)

譚建國

D. 方法美

在數學方法、解答方面, 數學的美具有什麼特點呢?

優美的解答應該使我們驚訝, 應該是出乎意料的。但是數學推理的美不能只用意外性來解釋。如果一個學生對一道習題, 想不出公式化的常規方法來解答, 只是勉勉強強地想出一種冗長的繞道的解法, 雖然這種解法大家完全沒有想到, 但是這個解法給人帶來的最多只能是感動, 而絲毫不能給人美的感受。

能給人優美感的數學方法與解答, 除了不尋常性以外, 還應該具有直觀性 (某種意義上也就是簡單性)。可以說, 方法美的主要特徵就是意外性 (新奇性) 和簡單性。

簡單性的含義如前文所述, 而新奇性則來源於數學思想的獨創性和數學方法的新穎, 它體現了數學理論或方法中的藝術因素。掌握這種藝術靠直覺。方法上的新奇往往要同時引入相應的新概念。由於對新奇性的評價與審美心理因素關係十分密切, 所以, 對一種新的理論或全新的方法的美學價值的看法總是存在爭議的, 例如, 對數學定理的機器證明就是如此。

關於方法之美我們在前文已經接觸過一些, 如“理論美”中的例4, 下面再通過分析一些例子, 對方法美作一番巡視。

(一) 數學思想方法的幾次重大轉折

歷史表明, 數學的發展, 不僅表現爲量的積累, 而且還表現爲質的飛躍。下面將論述的數學思想方法的四次重大轉折就充分說明了這一點。

1. 從算術到代數

算術和代數, 作爲最基礎而又最古老的兩個分支學科, 有著不可分割的親緣關係。算術是代數產生的基礎, 代數是算術發展到一定階段的必然產物。從算數發展到代數, 是人們對數及其運算在認識上的突破, 也是數學在思想方法上的一次重大轉折。

在算術解題法中, 未知數是不允許作爲運算的對象的, 它們沒有參加運算的權利。而在代數解題法中, 所列出的方程作爲一種條件等式, 已是由已知數和未知數構成的有機統一體。在這個統一體中, 未知數和已知數有著同等的權利, 即未知數在這裡也變成了運算的對象, 它們不再是消極、被動地靜

等在等式的一邊, 而是和已知數一樣, 可以接收各種運算指令, 並可以依照某種法則從等式的一邊移到另一邊。解方程的過程, 實質上就是未知數和已知數進行重新組合的過程, 也是未知數向已知數轉化的過程。

解方程是古典 (經典) 代數最基本的內容。方程在數學中占有重要的地位, 它的出現不僅極大地擴充了數學應用的範圍, 使得許多算術解題法不能解決的問題能夠得以解決, 而且對整個數學的進程產生巨大的影響。特別是數學中的許多重大發現都與它密切相關, 例如, 對二次方程的求解, 導致虛數的發現; 對五次和五次以上方程的求解, 導致群論的誕生; 對一次方程組的研究, 導致線性代數的建立; 應用方程解決幾何問題, 導致解析幾何的形成; 等等。

顯然, 代數解題法 (相對於算術解題法) 更具有新奇性和簡單性 (算術解題法需要更強的技巧)。

2. 從常量數學到變量數學

算術、初等代數、初等幾何和三角, 構成了初等數學的主要內容。它們都以常量即不變的 數量和固定的圖形爲其研究對象, 因此這部分內容, 也稱爲常量數學。運用常量數學可以有效地描述事物和現象相對穩定的狀態。可是, 對於描述運動和變化, 卻是無能爲力的, 於是便產生了從量上描述事物的運動和變化規律的數學部分 — 變量數學。從常量數學到變量數學, 是數學在思想方法上的又一次重大轉折。

變量數學產生的兩個重要步驟都是在十七世紀完成的, 因此十七世紀也就變成了常量數學向變量數學轉變的時期。變量數學的產生, 有著極重要的意義, 其具體表現可概括爲以下兩個方面。

首先, 變量數學的產生, 使數學自身在思想方法上發生了重大的變革, 由此帶來整個數學面貌的根本性改觀。通過這次變革, 常量數學的許多分支學科, 諸如代數、幾何、三角和數論等, 由於變量數學的滲透而在內容上得到了極大的豐富, 在思想方法上發生了深刻的變化。例如, 可把解方程理解爲求函數的零點; 借助分析的方法率先給出了代數基本定理的嚴格證明等等。通過這次變革, 新的數學分支雨後春筍般地湧現出來。諸如解析數論、微分幾何、微分方程論、積分方程論、級數論、差分學、函數論等。總之, 從變量數學產生後, 變量數學的思想方法很快就在整個數學中占據了主導地位, 不要說分析學和幾何學, 就是代數學也一樣, 由文字式的變換和解方程爲內容的初等代數發展到以代數系統的結構爲內容的近世代數, 變量數學的思想已滲透其中, 以各種“運動”(“變動”)構成的各類具體的代數系統構成近世代數的一個重要的部分, 如置換群, 關係半群, 算子代數等; 另外, 抽象代數系統的結構的刻劃也須借助於其上的若干特殊的“運動” — 同態, 同構等, 讓系統“動”起來, 在“動”中把握它的本質特性。

其次, 變量數學的產生, 使自然科學描述現實物質世界的運動和變化過程成爲可能。數學在自然科學各部門的應用範圍得到了空前的擴展。

變量數學的方法與常量數學的方法相比, 更具有新奇性 (如“線”是“點”運動的結果) 和簡單性 (如求平面曲線所圍成的面積)。

3. 從必然數學到或然數學

從必然數學到或然數學, 是數學思想方法的又一次重大轉折。所謂必然數學, 是指描述和研究現實世界的必然現象及其規律的那部分數學, 它包括通常的算術、三角、幾何、代數、微積分、微分方程論、積分方程論和函數論等分支學科。必然數學在科學技術、社會實踐以及日常生活中有著廣泛的應用, 成爲人們認識和改造世界的有力工具。然而, 在研究和解決現實世界大量存在的偶然現象中的量及其關係問題上, 必然數學就無能爲力了, 需要創造新的數學方法。於是, 一個新的數學領域 — 或然數學便被開拓出來了。

由於隨機現象在現實世界中大量存在著, 因此隨著科學技術和社會實踐的發展, 以概率論爲基礎的或然數學很快地蓬勃發展起來, 並越來越顯示出它的巨大威力。

首先, 或然數學與必然數學、自然科學與社會科學相互作用產生出許多新的學科, 如平穩隨機過程理論、馬爾科夫過程論、多元分析、試驗分析、統計物理學、統計生物學、統計醫學和概率邏輯等。

其次, 或然數學的理論和方法, 在科學技術、國防、工農業和經濟各部門得到廣泛的應用, 特別是在電子技術、自動控制、氣象預報、地震預報、地質勘探、企業管理、公共事業以及國防中的防空、巡邏搜索等部門已經取得明顯的社會效益。

容易理解, 以概率論爲基礎的或然數學其方法與必然數學相比是新奇的, 相對所要研究、考察的數學對象, 其方法又是簡單的。

4. 從明晰數學到模糊數學

人們在社會實踐和科學研究中遇到的各種量, 依其界限是否分明可分爲這樣兩類: 一類是明晰的, 另一類是模糊的。用於描述明晰量及其關係的變化規律的數學稱爲明晰數學。明晰數學是研究明晰量的有力工具, 但對模糊的量它就不適用了。人們在尋找處理模糊量及其關係變化規律的數學方法過程中, 創立了一門新的數學分支學科 — 模糊數學。模糊數學的產生, 是數學思想方法的又一次重大轉折。

模糊數學決不是把已經很精確的數學變得模模糊糊, 而是用精確的數學方法來處理過去無法用數學描述的模糊事物, 因爲在現實世界裡如果要想絕對地精確是辦不到的, 而我們也只能是把事物的不精確程度降低到無關緊要的水平罷了。模糊數學的出現, 給我們研究那些複雜的, 難以用精確的數學描述的問題帶來了方便而又簡單的方法。國際上有人說它是“異軍突起”。也正是因爲這點, 模糊數學才能滲透到各個領域裡去, 並且顯示出強大的生命力。

模糊數學雖然只有二十多年的歷史, 從理論上還遠遠談不到完善, 但對於它的研究, 無論基礎理論還是實際應用, 仍然得到了很大的發展。

在理論研究方面, 首先, 模糊集合概念本身不斷得到擴展, 產生出許多不同類型的模糊集合, 如 L 一模糊集合、R 一模糊集合、Z 型集合和 n 級模糊集合等。其次, 模糊數學的內容日漸豐富。所研究的課題已涉及到廣泛的範圍, 如模糊數、模糊關係、模糊圖、模糊向量、模糊關係方程、模糊映射及變換、模糊概率、模糊判斷、模糊規劃、模糊邏輯、模糊語言、模糊識別和模糊控制等等。

在應用研究方面, 模糊數學的思想與方法正在廣泛滲透到科學和技術的各個領域, 如物理、化學、生物學、醫學、心理學、氣象學、環境科學、管理學、經濟學、情報學、語言學、邏輯學、系統論、信息論、控制論以及人工智能等。同時, 在農業、林業、建築、採礦、冶金、地質、機器檢修等許多國民經濟領域都已取得初步的成果。模糊數學的理論和應用研究相結合, 是模糊數學發展的一個重要課題。

人類對現實世界“量”規律的探索, 是一個永無完結的認識過程。在未來數學發展的進程中, 還會出現新的重大轉折。特別是當代電子計算機的發展, 給數學的思想方法帶來了巨大的沖擊, 傳統的單純“人腦”支配“手工操作”的數學研究, 開始由“人–機” 系統來代替, 數學機械化的思想已初露端倪。可以預想, 由於電子計算機的進一步發展, 必將使數學在思想方法上發生根本變革, 並由此引起數學新的重大轉折。

(二) 逆向思維方法

逆向思維是相對於慣常思維而言的一種思維形式。所謂慣常思維, 就是通常所說的習慣性思維, 它的基本特徵是因循已有的思路去考慮和思索問題, 這種思維形式反映了思維過程的連續性、漸近性和聯結性, 是思維慣性的表現。逆向思維則是發散思維的一種, 它的基本特徵是, 從已有思路的反方向去考慮和思索問題, 這種思維形式反映了思維過程的間斷性、突變性和反聯結性, 是對思維慣性的克服。利用逆向思維得到的結果顯然具有某種新奇性。

慣常思維對於數學研究是不可缺少的, 沒有它, 就沒有知識的穩步增長和理論體系的鞏固、完善; 同樣, 逆向思維也是不可忽視的, 因為沒有它, 就難以擺脫已有數學觀念、理論框架的束縛, 許多具有突破性的重大數學概念、數學理論也就難以產生出來。具體說來, 逆向思維在數學研究中的作用, 主要表現在下面幾個方面:

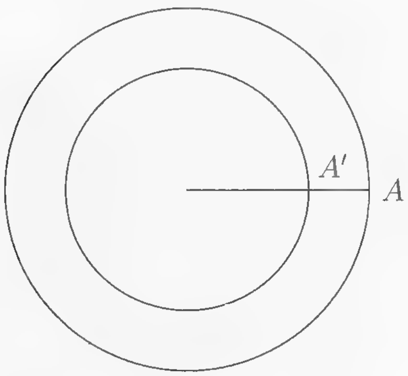
(1) 有利於克服慣常思維的保守性, 開拓新的數學領域;
(2) 有利於糾正慣常思維所造成的錯誤認識, 開闢數學新方向;
(3) 有利於排除慣常思維過程中出現的困難, 開通新的思路。

下面給出一些利用逆向思維的例子。

1. 集合論的創立

我們知道, 集合論建立的關鍵, 就在於承認無限集合的存在以及它和它的子集可以建立起元素間的 $1-1$ 對應關係。可是, 對這個關鍵問題, 慣常思維的結果長期以來一直

是錯誤的。早在公元前四世紀, 希臘學者亞里士多德 (Aristotle) 就曾考慮過整數集合 $\{1, 2, 3, \ldots\}$, 他承認整數有無窮多個, 但不承認它們可以作爲一個整體而存在。到了中世紀, 數學家和哲學家又發現了不少的東西。例如, 兩個周長不等的同心圓, 可通過半徑使圓周上的點構成 $1-1$ 對應的關係, 即對大圓上的任意一點 A, 總有小圓上的一點 A' 與之對應, 反之亦然。但由於受有限集合傳統觀念的束縛, 他們抹煞了"整體可以和部分構成元素之間的1-1對應"的事實。甚至到了十九世紀中葉, 大多數數學家對無限集合的認識還是錯誤的。他們囿於有限集合的觀念, 認爲整體在任何情況下, 都不可能與它的部分在數量上處於同等的地位。



歷史上第一個打破有限集合觀念的框架, 敢於對無限集合進行逆向思維的是捷克數學家波爾查諾 (Bolzano, B.)。他不僅承認無限集合的存在, 而且把無限集合作爲數學的對象來加以研究。他明確提出, 無限集合的部分可以等價於整體, 無限集合有其自身特殊的結構, 這種結構與有限集合有著質的不同。波爾查諾的思想是革命性的, 也是與傳統數學觀念背道而馳的。正是這種反傳統的逆向思維, 爲後人研究無限集合開闢了新的方向, 他本人也就由此成爲集合論的先驅者。

沿著波爾查諾所開闢的新方向繼續前進的是德國著名數學家康托爾 (Cantor,Georg Ferdinand Ludwig Philipp), 他發展了波爾查諾的思想, 明確提出了研究無限集合的主要方法 — $1-1$ 對應, 提出了一連串新的概念: 極限點、導集、可列集、連續集等, 並且用"基數" 這一概念區分和描述了無窮集合的等級。康托爾正是由於徹底背叛了兩千多年來人們在無限集合問題上的傳統思維方式, 把長期以來顛倒了的事實又重新顛倒了過來, 所以才成功地開闢出數學的一個新領域 — 集合論。

隨著集合論向數學各分支學科的全面滲透, 它逐漸成爲全部數學的基礎。

2. "四色問題"的機器證明

"四色問題"亦稱爲"四色猜想"。它是指: 用四種顏色就可以把所有地圖塗上色, 使得具有共同邊界的國家 (地區) 染有不同的顏色。這問題最早是由德國數學家麥比烏斯 (Möbius, August Ferdinand) 於1840年提出的。1852年, 英國青年數學家弗南希斯, 格思里 (Francis Guthrie) 在對英國地圖著色時重新提出了這一問題, 並寫信告訴他哥哥弗雷德里克 (Frederick Guthrie)。弗雷德里克企圖從數學上給予證明, 但沒有成功, 於是便請教他的老師、著名數學家德·摩根 (De Morgan,Augustus)。德·摩根絞盡腦汁, 同樣沒能給出證明。他只好寫信給在

都柏林的著名數學家哈密頓 (Hamilton, Sir William Rowan), 請他加以研究。哈密頓思考這問題達十三年之久, 直到去世仍無任何進展。

1878 年, 著名數學家凱萊 (Cayley, Arthur) 認識到這問題非同尋常, 把它提交給倫敦數學學會。“四色問題”由此便被數學界所周知。開始, 數學家們對這問題的難度估計的並不充分, 有的甚至把它看得十分簡單。然而, 一百多年來, 許多數學家認眞研究了它, 結果都白費力氣了。數學家希伍德 (Peray John Heawood) 曾堅持奮鬥了六十年之久, 他雖然成功地證明了 “五色猜想”是對的, 但他卻沒能判斷出“四色猜想”的眞僞。於是人們開始認識到這個貌似容易的題目, 其實是一個可以與費爾馬大定理比美的難題。

到了本世紀七十年代, 某些深有卓見的數學家指出:“四色猜想”可能是一個正確的定理, 但它需要用一種數學中前所未有的不同方法來論證, 這個論證是不能單獨用人力來完成的。於是, 有人開始轉向電子計算機, 試圖借助機器的力量給出問題的答案。1976 年, 美國伊利諾 (Illinois) 大學的數學家阿佩爾 (K.Appel) 和黑肯 (W.Haken) 等人, 就是在這個方向上取得成功的。按照他們設計的程序, 計算機運行了1200多個小時, 作了兩百億個邏輯判斷。1977 年, 在一次數值數學與計算機會議上, 有人又宣布了一個比較簡單的證明, 但也要用去50小時。如果有一個具有足夠迅速和準確判斷力的人來完成這項工作, 大約要花費30萬年。(參見[14]、[18])

這項工作最重要的意義, 不在於證明了四色定理, 而在於運用電子計算機完成了這件人沒有能完成的事情, 提供了用計算機研究數學的範例。它的美學價値就在於, 方法的新奇性與 (相對) 簡單性 — 歷時124年、經過許多數學大家的艱苦努力未能完成的世界難題, 引入計算機後, 終於如願以償!並將開闢一個數學研究的新時代。

從相反的方向進行思考, 往往導致某種意想不到的後果。這正是逆向思維的重要功能之所在。然而, 並非所有的逆向思維都是富有成果的。這是因爲逆向思維本身具有很大的不確定性; 自然, 也並非所有逆向思維的成果都是美的, 因爲方法之美除了新奇性之外, 還必須具有簡單性的特徵。

(三) 遞歸模式

“遞歸模式”是數學上的一種十分重要的解題模式, 在用其它的解題方法遇到困難的時候, “遞歸模式”有可能幫助我們迅速地掃除障礙。事實上, 應用得十分廣泛的數學歸納法, 採用的就是“遞歸模式”的推理。在數論中舉足輕重的“輾轉相除法”、“無窮遞降法” 以及高階行列式求値時的“遞推展開”等等, 都可以看作是“遞歸模式”的體現。

例: 求 $S_k(n)=\sum_{i=1}^{n} i^k$, k 與 n 都是自然數。

我們採用“遞歸模式”來求解。

先從比較簡單的情況考慮起:

當 $k=1$ 時, $S_k(n)$ 即 $S_1(n)=1+2+\cdots+n$。

求 $S_1(n)$, 可以利用“對稱性原理”, 將兩個順序完全相反的 $S_1(n)$ 相加, 再把和除2。

$$\begin{array}{rl} & S_1(n) = 1+2+\cdots+n \\ +) & S_1(n) = n+(n-1)+\cdots+1 \\ \hline & 2S_1(n) = (n+1)+(n+1)+\cdots \\ & \quad +(n+1) \\ & \quad = n(n+1) \end{array}$$

故 $S_1(n) = \frac{n(n+1)}{2}$。

當 $k=2$ 時, $S_k(n)$ 即 $S_2(n) = 1^2+2^2+\cdots+n^2$。

以上所用“對稱性原理”對於 $S_2(n)$ 已經行不通了。爲了尋找一種對一般 $S_k(n)$ 普遍適用的辦法, 讓我們再來看看還有沒有別的辦法也能求出 $S_1(n)$。

注意到我們剛才求出的 $S_1(n)$ 的表達式 $S_1(n) = \frac{n(n+1)}{2}$ 是 n 的二次式, 如果我們能夠找到 $S_1(n)$ 中的通項 n 與 n 的二次式之間的某種聯繫, 也許就可以指望這種聯繫幫助我們求出 $S_1(n)$。這使我們想起了恆等式

$$(n+1)^2 - n^2 = 2n+1$$

依次令 $n = 1, 2, 3, \cdots$ 就得到如下 n 個等式

$$\begin{aligned} 2^2-1^2 &= 2\times 1+1 \\ 3^2-2^2 &= 2\times 2+1 \\ 4^2-3^2 &= 2\times 3+1 \\ \cdots &= \cdots \\ (n+1)^2-n^2 &= 2n+1 \end{aligned}$$

將此 n 個等式兩邊分別相加, 即得

$$(n+1)^2 - 1^2 = 2S_1(n) + n$$

故 $S_1(n) = \frac{n(n+1)}{2}$。

以上方法不難用於求 $S_2(n)$, 只需由恆等式

$$(n+1)^3 - n^3 = 3n^2+3n+1$$

依次令 $n = 1, 2, 3, \cdots$ 得到

$$\begin{aligned} 2^3-1^3 &= 3\times 1^2+3\times 1+1 \\ 3^3-2^3 &= 3\times 2^2+3\times 2+1 \\ \cdots &= \cdots \\ (n+1)^3-n^3 &= 3n^2+3n+1 \end{aligned}$$

再將此 n 個等式兩邊分別相加, 得

$$\begin{aligned} &(n+1)^3 - 1^3 \\ =\ & 3S_2(n) + 3S_1(n) + n \end{aligned}$$

而 $S_1(n)$ 已知, 故

$$S_2(n) = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)。$$

完全仿照以上的作法, 我們可以求得

$$\begin{aligned} &(n+1)^{k+1} - 1 \\ =\ & C_{k+1}^1 S_k(n) + C_{k+1}^2 S_{k-1}(n) + \cdots \\ & +C_{k+1}^k S_1(n) + n \end{aligned}$$

上式建立起了 $S_k(n)$ 與 $S_{k-1}(n)$、$S_{k-2}(n)$、$\cdots$、$S_1(n)$ 之間的遞推關係, 只要我們知道了 $S_1(n)$、$S_2(n)$、$\cdots$、$S_{k-1}(n)$ 的值, 馬上就可以求得 $S_k(n)$ 的值。於是問題得到解決。

“遞歸模式”的最大優點是運算與證明的程序性很強, 非常便於計算機處理。所以在

現代數學中,“遞歸模式”日益顯示出它的重要性。

對數學之美的巡視到這裡就要告一個段落了。我們看到, 數學中也處處充滿了美, 只要用心去體驗、去尋找, 必能滿意而歸。

最後, 我要向對於這次探討給予了極大支持和幫助的戴正德教授致以衷心的感謝! 郭聿琦教授對本文的修改提出了許多建設性的建議, 並親自加以指導, 在此也表示最誠摯的謝意。

主要參考書目

1. 美學教程編寫組: 美學教程, 中國社會科學出版社, 1987年1月。
2. 高爾泰: 美是自由的象徵, 人民文學出版社, 1986年12月。
3. 張相輪、凌繼堯: 科學技術之光 — 科技美學概論, 人民出版社, 1986年12月。
4. 周義澄: 科學創造與直覺, 人民出版社, 1986年6月。
5. 姜念濤: 科學家的思維方法, 雲南人民出版社, 1984年5月。
6. 周忠昌: 創造心理學, 中國青年出版社, 1983年5月。
7. H. 加登納: 智能的結構, 光明日報出版社, 1990年9月。
8. M. 克萊因: 古今數學思想,(1-4冊), 上海科學技術出版社, 1979年10月。
9. 中國大百科全書總編輯委員會數學編輯委員會: 中國大百科全書 (數學卷), 中國大百科全書出版社, 1988年11月。
10. 梁宗巨: 世界數學史簡編, 遼寧人民出版社, 1980年8月。
11. 解恩澤、趙樹智等: 簡明自然科學史手册, 山東教育出版社, 1987年7月。
12. L.A. 斯蒂恩: 今日數學 — 隨筆十二篇, 上海科學技術出版社, 1982年8月。
13. 解恩澤、趙樹智: 數學思想方法縱橫論, 科學出版社, 1987年6月。
14. 張奠宙、趙斌: 二十世紀數學史話, 知識出版社, 1984年2月。
15. E.T. 貝爾: 數學精英, 商務印書館, 1991年7月。
16. 徐本順、殷啓正: 數學中的美學方法, 江蘇教育出版社, 1990年7月。
17. 徐利治、王前: 數學與思維, 湖南教育出版社, 1990年1月。
18. 張光遠: 近現代數學發展概論, 重慶出版社, 1991年12月。
19. 孔慧英、梅智超: 現代數學思想概論, 中國科學技術出版社, 1993年12月。

—本文作者任教於中國雲南大學數學系、基礎數學研究所—

數學發現中的想像

朱 茱

想像是數學思維的基本要素, 同時又是導致科學發現的思想基礎。著名科學家愛因斯坦 (Einstein,1879-1955) 曾經說過「想像力比知識更重要, 因爲知識是有限的, 而想像力概括著世界上的一切, 推動著進步, 並且是知識進化的源泉。嚴格地說, 想像力是科學研究中的實在因素。」[1] 美國數學家 N. 維納 (Wiener,1894-1964) 也曾說過: 「就我而言, 最有用的資質, 乃是廣泛持久的記憶力, 以及猶如萬花筒一般的自由想像力。這種想像力本身或多或少會向我提供關於極其複雜的思維活動的一系列可能的觀點。」[2] 在探索性的思維中, 經過類比、歸納和聯想, 可以依據事物之間的某些方面的相似與關聯, 進而推測其他方面可能存有相似與關聯之處。對此經過超脫、昇華, 即可能產生想像, 充分發揮數學想像力, 可以激發人們提出新的追求, 立志攀登新的高峰。

一. 數學想像的層次

對於數學想像的能力, 由淺入深可以劃分爲若干個層次, 不同的層次相應地決定了數學想像所能涉及的範圍和效果。這些層次爲:

1. 第一層次是幾何思維

幾何學以平面和空間圖形爲研究對象, 其中的圖形都是理想化抽象, 但其直觀特徵仍然很明顯, 人們看到幾何圖形, 就可以直接聯想到現實事物, 從幾何思維中即可進而體會到具體與抽象的基本關係。法國數學家 R. 托姆 (Thom,1923–) 是菲爾茲獎獲得者, 他曾說過:「由日常思維過渡到形式思維, 中間最自然是通過幾何思維了, 人類思維的歷史就是如此。」[3] 幾何思維是一種最直接的形象思維, 形象思維是右腦的功能。右腦思維的發散性特徵較強烈, 數學上的新思想、新概念和新方法, 大都來源於這種發散思維。

2. 第二層思維是類幾何思維

這是借助於幾何空間關係而進行想像的一種形象思維。它雖然沒有幾何思維那樣具體和直觀, 但卻可以形成與幾何思維相類似的形象思維。例如, 非歐幾何的空間關係、高維空間關係、泛函空間關係等, 都可以運用類幾何思維進行想像。在這些空間中, 可以在不同的意義上類似地定義「點」、「直線」、「平面」等概念, 運用通常的歐氏幾何方法, 即可把幾何思維中所積累的認識, 推廣到更爲廣闊的領域。

類幾何思維是幾何思維的變形和推廣, 它具有較高的抽象性, 運用類幾何思維需要擺

脫直觀上的局限性。例如, 利用類幾何思維, 通過解析幾何的方法, 可以把抽象幾何空間問題, 轉換爲代數和分析問題。

類幾何思維在數學發展中扮演著重要的角色, 它是幾何學與其他數學分支在思想方法上相互滲透的中介環節。非歐幾何的歐氏幾何模型的發現, 就是依靠類幾何思維的力量。當時, 克萊因、龐卡萊和貝爾特拉米等人利用一些巧妙的約定, 把非歐幾何中那些直觀上看來格格不入的空間關係, 利用類幾何思維, 轉換爲歐氏幾何中的普通定理, 並由此而完成了非歐幾何理論相對相容性的證明。這種數學想像過程, 有時被人們稱之爲「翻譯」。

3. 第三層次是數覺

所謂數覺, 即是對各種數量關係及其重新組合過程的形象化感覺。這種感覺更爲抽象、更爲朦朧, 更富有神秘色彩。例如, 在坐標軸上, 當動點從坐標1處移動到坐標原點0時, 它即是通過了無窮可數點集

$$\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots, \frac{1}{n}, \cdots\}$$

中的一切點, 這個無窮可數點集即是數覺的想像。印度數學家 S. 拉馬努眞 (Ramanujan,1887-1920) 憑藉數覺曾想像出很多數學定理, 有一次他的老師英國著名數學家 G.H.哈代 (Hardy,1871-1947) 乘車去看他, 汽車的牌號是1729, 拉馬努眞想了一下, 馬上就說: 這是能用兩種方法表示爲兩個整數立方和的最小整數, 即 $1929 = 1^3 + 12^3 = 9^3 + 10^3$。1913年, 他在寫給哈代的信中, 提出120條公式, 在他離開人世的56年之後, 美國賓夕法尼亞大學教授安德羅又在他的遺物中發現一個筆記本, 其中記有600多條公式, 這些公式都是由他的數覺想像而發現的, 其中有些公式的證明至今尚未被其他數學家所發現。

二. 數學想像的基本類型

實驗心理學的研究表明: 人們獲得的知識1.5%來自於觸覺,11%來自於聽覺, 83%來自於視覺, 其餘來自於嗅覺和味覺。從生物學角度來看, 數學想像大致可分爲視覺想像、聽覺想像和觸覺想像三種。然而, 這三種基本類型有時也很難加以區分。有些數學家也可以兼有幾種想像能力, 並在不同時期、不同問題上各有所側重。法國著名數學家 J.S 阿達瑪 (Hedamard,1865-1963) 在「數學發明創造心理學」一書中寫道:「實際上他們所有的人 ··· 不僅迴避使用理性語言, 也迴避使用代數的或精確的符號 ··· 他們使用豐富的想像。」J.S 阿達瑪把這種想像稱爲有意識的數學思考過程中的潛意識流, 認爲這種現象雖然難以描述, 但實際上確乎存在。現在對於視覺想像、聽覺想像和觸覺想像分別討論如下:

1. 視覺想像

視覺想像是人們比較熟悉的想像活動, 在對歐氏幾何的視覺想像中, 比較困難的問題, 就是解幾何題時對於輔助元素 (點、線、面

等) 的添加。這時必須首先在頭腦中想像出它的存在, 並預測出該輔助元素在構造已知信息與未知信息之間的邏輯關係時, 是否眞有價值。

在類幾何思維中, 視覺想像需要借助放邏輯思維來塡補直觀上的缺陷。非歐幾何學的建立, 即來自於 N.I. 羅巴切夫斯基 (Iobatchevsky,1793-1856) 對於非歐空間的想像, 正是因爲如此, 他又把自己所發現的這種新幾何學, 稱之爲「想像幾何學」。並且提出:「在觀測不足的情況之下, 應當憑理智來設想, 想像幾何學可以用於被觀測到的世界之外以及分子引力範圍之內。」[5] 拓撲學亦稱「橡皮幾何學」它具有許多直觀性質。隨著這門學科的進一步發展, 逐步發現有許多拓撲性質也是難以用直觀來把握的。例如, 在三維歐氏空間中就做不出「克萊田 (Klein) 瓶」和「米爾諾 (Milnor) 怪球」對比, 數學家們則堅持認爲需要用視覺想像來處理它們。

法國數學家 H. 龐卡萊 (Poincare,1854-1912) 把存在於人腦中的各種數學思想和概念, 叫做「觀念原子」, 他認爲這群帶勾的「觀念原子」平時掛在牆上, 開動大腦機器之後, 成群結隊的「觀念原子」在空中翩翩起舞, 並且相互組合成爲新的「觀念原子」。龐卡萊對於「觀念原子」的這種描繪, 也是一種視覺想像。

2. 聽覺想像

聽覺想像是數學想像中比較玄妙的一種類型。美國數學家 S.烏拉姆 (Ulam) 在介紹數學家 J. 馮.諾伊曼 (Von Neumann,1903-1957) 的思想特徵時曾經說過: 「假如你一定要把數學家分成兩類 (如龐卡萊所建議過的) —有視覺直觀的和聽覺直觀的—那麼約翰尼 (馮.諾伊曼的愛稱) 也許屬於後者。然而, 他的「聽覺直觀」大概是非常抽象的。」[6] 被稱爲計算機之父的馮諾伊曼在「論數學」一文中, 對於數學領域中人類智能的性質問題則這樣寫道:「討論任意領域中的智能活動的性質, 是一個困難的任務, 對處於人類智能中心領域的數學就更是如此。」

3. 觸覺想像

在數學想像中最爲玄紗的, 要屬觸覺想像了。它的重要性越來越引起數學家們的注意, 看來在發展三維以上的形象思維時, 觸覺想像是不可缺少的。美國數學家 H. 魏依曾經指出:「從心理學的角度來看, 眞正的幾何直觀也許是永遠不可能弄明白的, 以前它主要意味著是三維空間中的形象的瞭解力。現在高維空間已經把比較初等的問題基本上都排除了, 形象的瞭解力至多只能是部分的或象徵性的, 某種程度的觸覺想像也似乎牽涉進來了。」[8] 美國布朗大學數學家 T. 班喬夫 (Banchoff) 和計算機科學家 C. 斯特勞斯 (Strauss) 設計出在三維空間內外移動的四維超立方體的計算機生成的運動圖象。人們坐在計算機控制台前, 使用一組按紐, 即可以獲得各種角度的超立方體的三維投影圖。下面的圖一和圖二就是由 T. 班喬夫和 C. 斯特勞斯作出的, 這乃是從幾個角度觀察複指數函數 (一個四維對象) 所獲得的圖像。

三. 數學想像獲得成功的前提

概括地說, 數學想像獲得成功的基本前提有五, 現在分別闡述如下:

1. 具備一定的數學基礎知識

進行數學想像是一門高超的藝術, 只有在堅實的數學基礎之上, 才能對於現實問題有所超脫、昇華、改組以至扭曲和變形。進行數學想像除了數學基礎知識而外, 還需要其他學科甚至是多種學科知識做爲基礎。只有在更寬闊的領域之上, 利用較大的知識跨度, 數學想像才能振翅高飛, 並且通過想像把表面上互不相關的問題, 從本質上找出其間的聯繫。然而, 只依靠零星的貧乏的知識, 就企圖獲得重要的數學想像, 其成功的概率幾乎等於零。K.F. 高斯 (Gauss, 1777-1855)、N.I. 羅巴切夫斯基 (Lobatchevsky, 1793-1856), D. 希爾伯特 (Hibbert, 1862-1943) 等大數學家都是在雄厚的數學基礎知識之上, 才能施展才華, 使自己的想像得以自由馳騁的。

2. 要培養高層次的數學想像力

不同層次的數學想像, 所涉及的範圍和效果迥異。以非歐幾何的發現爲例, 意大利數學家 G. 薩開里 (Saecheri, 1667-1722) 和德國數學家 H. 蘭伯特 (Lambert, 1728-1777) 遠在十七世紀和十八世紀, 就曾從試證第五公設中發現了與直觀相矛盾的結果, 及至十九世紀, 德國數學家 F.K. 須外卡特 (Schweikart) 和 F.A. 塔烏里努斯在獲得與薩開里等人相類似的結果之後, 則推斷這些結果可能屬於一種「星際幾何」。這兩位數學家雖然都達到了與 C.F.高斯 (Gauss, 1777-1855), N.I. 羅巴切夫斯基 (Lobetchevsky,1793-1856)、J. 鮑利耶 (Bolyal, 1802-1860) 在研究非歐幾何時的相同起點上, 但卻失去了創立非歐幾何學的機會, 其根本原因, 即在於他們的數學想像力還未能達到類幾何思維的水平。

3. 數學想像的本質就在於它的自由

大數學家 G. 康托 (Cantor,1845-1918) 主張數學和其它領域的區別在於它可以自由地創造自己的概念, 亦即是說數學想像可以自由發展。他利用自由想像把無限理論發展到令人眩暈的高度。康托喜歡使用「自由數學」這個名詞, 來取代通常所說的「純粹數學」。1883年, 他曾經說過:「數學在它自身的發展中完全是自由的, 對它的概念的限制只在於: 必須是無矛盾的, 並且與先前由確切定義而引進的概念相協調 $\cdots$ 數學的本質就在於它的自由。」[9]

在數學發展史上, 一些有重大成就的數學家, 都特別注意自己的文學藝術修養, 並以此來培養自己的自由想像的能力和習慣, 例如法國數學家 A.L. 哥西 (Cauchy 1789-1857) 從小就注意文學藝術課的學習, 以致後來他在數學分析的嚴格化方面, 做出了重大貢獻。英國數學家布羅諾夫斯基也曾指出:「所有偉大的科學家都在自由地運用他們的想像, 並且聽任他們的想像得出一些狂妄

的結論, 而不叫喊『停止前進』[10]」。由此可見, 提倡自由想像, 對於數學的發展具有重要價值。

4. 數學想像時宜陷入於沉思狀態

人們長期專注於某個問題, 就會造成想像的一定深度, 這種心理現象, 一般稱爲沉思。如果數學想像時陷入於沉思狀態, 將會更有成效。有人在回憶起愛因斯坦陷入於創造性沉思之中進行科學想像的情景時, 曾經這樣寫道:「他常常一言不發, 獨自凝思, 在思索一個問題時, 往往兩眼發直, 來往於室中, 像害了一場熱病似的, 連飲食也要送到研究室中。」其實, 在科學史上, 曾經陷入於高度沉思狀態進行科學想像的, 何止是愛因斯坦一人! 許多數學家爲了解決一個難題, 常常都是「獨上高樓, 望盡天涯路」張開想像的翅膀, 任意翱翔!

美國數學家 N. 維納 (Wiener,1894-1964) 曾經這樣說過, 他的數學想像在「受外界干擾最小的時刻進行得最好, 而這往往又是在睡眠初醒的時候。其實, 很可能在夜間某個時刻, 即已經經歷了對於建立我的思想所必須的思考過程。我可以肯定, 這種思考過程部份地是在睡眠狀態之中以夢的形式進行的, 這種思考如果處於等待入睡的催眠狀態, 則更爲有效。」[11]

5. 學術爭論亦能激勵數學想像力

由於各個數學家有著不同的知識背景, 不同的觀察角度以及不同的思維方法, 通過學術交流和學術爭論, 可以相互補充, 相互激勵, 可以使以錯誤知識和可疑推理爲依據的數學想像得到澄清, 可以使追蹤錯誤線索的盲目狂熱得到遏制。法國數學家 J.S. 阿達瑪 (Hedamard,1865-1963) 曾經說過: 優秀的數學家經常會犯錯誤, 但他們能很快發現並糾正錯誤。然而, 發現錯誤和糾正錯誤的有效途徑, 則是通過學術討論。一些測試表明, 當以小組形式進行學術討論時, 成年人的數學想像力, 可以提高66-93%。其原因則是除小組成員之間相互啓發之外, 他們之間的相互競賽也可以使成年人或兒童的思維效率大爲提高。[12]

四. 數學想像的作用及其局限性

數學想像的特點是神馳萬里, 思接千載, 海闊天空, 自由創造, 越是離奇古怪的想像, 越能導致極有價值的科學成果。爲了說明想像在數學發展中的實際作用, 下面我們來引證美國數學家 M. 克萊因的一段話:「J. 瓦里斯 (Wallis) 在他的「代數」把高維空間看成是『自然界的怪物, 它比希臘神話中獅頭羊身蛇尾的或半人半馬的妖怪還難以想像。』··· J. 奧扎南 (Oznam) 指出過, 一個多於三個字母的乘積將是『有多少字母就有多少維數』的一種度量,『但這只能是一種想像, 因爲在自然界, 我們並不知道任何一個多於三維的量』[13] 關於高維空間的數學想像, 曾有很多大數學家誤認爲是連幻想也是不能想像的, 但後來卻終於被數學界所接受。

充分發揮數學想像的作用, 在一些高度抽象的數學領域中, 經過數學家的巧妙構思, 肯定能夠想像出許多全新的數學結構。M. 克萊因曾經指出「那些在眞實世界沒有直接對應物的概念之被引進並逐步被接受, 確實迫使人們承認數學是一種人爲的並且多少帶有任意性的創造物, 而不僅僅是從自然界裡引導出來的本質上是眞實事物的一種理想化。但是隨著這種認識的深化, 帶來了更加意義深遠的發現 —數學並不是關於自然的一堆眞理」[14]。

但是, 數學想像的作用, 仍然是有局限性的。因爲在數學想像中, 有者可能會被事實所否定, 有者可能科學價值並不大。因此, 對於數學想像既要自由發揮, 但也不可信馬由韁。要經常對數學想像進行評估, 隨時檢查和糾正已被證實是錯誤的想像。劍橋大學心理學教授 F. 巴特利特 (Barltett) 曾經提出「測定智力技能的唯一最佳標準可能是檢測並摒棄謬誤的速度。」

數學想像與數學直覺之間的關係是比較密切的, 複雜的想像已經具備很多直覺的色彩, 例如其中的「漸悟」和「頓悟」已屬於直覺思維的範疇。W.I.B. 貝弗里奇著「科學研究的藝術」一書中第五章爲「想像力」, 第六章爲「直覺」。他在第五章開端時寫道:「本章所包括的很多材料都應視爲與『直覺』有關, 而下一章的內容的大部份也同樣適用於『想像力』。」[16]

注釋

1. 愛因斯坦文集, 商務印書館出版, 1976年第一卷, p.284。
2. 數學史譯文集續集, 上海科學技術出版社,1985年, p.54。
3. R.Thom, 新數學是教育和哲學上的錯誤嗎? 數學譯林, 1980年2月。
4. 李學數, 數學和數學家的故事, 香港出版,1980年, p.46。
5. 解恩澤、趙樹智, 數學思想方法縱橫論, 科學出版社出版, 1987, p70。
6. 數學史譯文集, 上海科學技術出版社出版, 1981年, p.91。
7. 鄧東皋、孫小禮、張祖貴, 數學與文化, 北京大學出版社出版, p.28。
8. 陳省身, 從三角形到流形, 自然雜誌, 1979年, 第8期。
9. M. 克萊因, 古今數學思想, 北京大學譯, 上海科學技術出版社出版, 1984年, 第四册, p.105。
10. 周昌忠, 創造心理學, 中國青年出版社出版, 1983年, p.213。
11. 數學史譯文集續集, 上海科學技術出版社出版, 1985年, p.55。
12. A.F. 奧斯本, 創造性想像, 中國發明者基金會, 中國預測研究會, 1985年, p.75。
13. 書名同 [9], p.102。
14. 書名同 [9], p102-103, p.106。
15. W.I.B. 貝弗里奇 (Beveridge), 科學研究的藝術, 陳捷譯, 科學出版社出版, 1979年, p.63。
16. 書名同 [15], p.56。

—本文作者任教於中國安徽省阜陽師範學院數學系—

高中生應該知道的積分與應用

石厚高

八十三年十一月十九日聯合報報導「一位國中學生數學考試三十八分竟然是全班第二高分, 老師考倒了學生, 卻可能因而扼殺了一位數學天才」該校另一位化學老師也誇口說「我出的試題, 全校學生成績一定不會超過四十分, 這樣的試題才有水準」實在是匪夷所思, 這位老師太有「水準」了。

本次月考筆者命題, 範圍是高三理科數學第三章全部「積分與應用」, 高中生學積分的層次與大學生是有差距的, 一想到有一千三、四百人要使用這份試題心頭就感沉重, 考完馬上看考卷總算完成使命, 把建中學生程度作適度表現, 我不能說「佳評如潮」、「一片叫好」只能說「幸未辱命」, 中等學校不論月考、期考、模擬考的命題人只要不挨罵就很滿意了, 要求大家叫好是很難的。我命題的原則是就課本的範圍命題, 大家都講過的我才出, 我沒有講過的要出一些, 要用「妙招」、「令人厭惡的技巧」才能作的絕對不出, 我講過別人沒講過的也不出, 所以我教的班表現仍然是恰如其份, 不會因為自己班的老師命題就表現的特別突出。考完我問學生有沒有看出是我命題, 學生都很驚訝一致答以不知道。填空出了二十二格每格四分, 共八十八分, 計算題十二分。筆者所教二班共 99 名學生, 各題答對人數如下

題號	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
答對人數	55	53	99	92	79	93	92	58	90	75
題號	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
答對人數	81	83	82	48	55	31	77	59	92	77
題號	21	22						1	2	3
答對人數	61	41						78	69	38

雖然只統計了兩個班, 卻很可以看出來那些題目學生會作的多, 那些題目學生會作的少。各班成績單都是交由導師發給學生、一考完我就有了自己兩個班的平均成績 (低標準) 69.48、68.82與高標準82.47、我又向各班導師要成績單, 有了八、九班算一次, 收集到十七、八班又算一次、一直到二十七個班全部收齊, 高標準、低標準與自己班的都是十分接近, 所以兩個班各題答對率與全年級不會有太大差距。

三年級參加考試人數是1372, 不及格人數佔 $\frac{353}{1372}=26\%$, 接近四分之一好像是多了一點, 道理簡單, 建中很有些「不到最後關頭決不輕言讀書」的學生, 再看低於50分的只佔 $\frac{164}{1372}=12\%$ 就很容易理解了。在 $60-79$ 區間的佔 $\frac{615}{1372}=45\%$ 比率是很大的, 滿分資優生佔 $\frac{17}{1372}=1\%$。低標準 $\frac{94125}{1372}=68.60$ 高標準 $\frac{54737}{666}=82.19$ 資深有經驗的老師都知道68.6的低標準是相當高的, 與高標準82.19一對照可以看出來建中學生的成績是很不錯的。高三自然組有二十七班, 我把二十七個平均數由小而大排列寫在下面, 成績統計分佈表列在本文之末。

60.72	62.58	62.86	62.87	63.84	65.96	66.07	66.12	67.64
67.76	68.28	68.35	68.71	68.81	68.82	69.18	69.40	69.48
69.48	69.78	70.74	70.92	71.68	72.36	73.70	74.32	82.20

最高的82.20是資優班, 二年半前高中聯考數學成績得120分的編進資優班、所以成績突出。少數班級的平均數遠低於全年級低標準, 因爲那些班級在高二升高三分組時多人轉往第三類組, 第三類組考大學時要多考一科生物, 不太有把握的不敢轉、所以分數就低了。有一年筆者教的兩個班在結算學期成績時, 一個班成績在80分以上的有十幾個, 另一班一個都沒有, 建中沒有作能力分班, 原因是一樣的。從各項統計數據可以看出來, 這份試題把建中學生程度作了適度表現, 有兩位老師對我說「命題成功」, 另有幾位說改起來很愉快, 高分不多、不及格的也不多, 所以我把它寄給數播, 願與同行共享。下面是各題出處與說明。

[甲] 出自課本, 課本的函數是 $y=x^2$ 與 $y=x^3$、這裡只把函數改作 $y=2x$ 求 (1) 上和 (2) 下和 (3) 曲線下方面積。

[乙] 求五個式子的極限,(4)、(5)、(6)、(7) 出自課本, (8) 題如果想到它是下列二式之積

$$(1-\frac{1}{2})(1-\frac{1}{3})\cdots(1-\frac{1}{n})$$

與 $$(1+\frac{1}{2})(1+\frac{1}{3})\cdots(1+\frac{1}{n})$$

就很容易了。特別要提的是第 (5) 題, 在習題討論時發現學生的作法是

$$\lim_{n\to\infty}(n\sqrt{\frac{n-3}{n+3}}-n)=\lim_{n\to\infty}n\cdot(\sqrt{\frac{n-3}{n+3}}-1)$$

$$= \lim_{n\to\infty} n \cdot \left(\sqrt{\frac{1-\frac{3}{n}}{1+\frac{3}{n}}} - 1\right) = \infty \cdot 0 = 0$$

可是 ∞ (無限大) 是個符號不是個數, 如果它是個數就會得到不可思議的結果, 級數

$$1+2+4+8+16+32+\cdots$$

之和要多麼大就有多麼大, 也就是無限大, 設它的和是 a, 令

$$1+2+4+8+16+32+\cdots = a$$

故得

$$1+2(1+2+4+8+16+32+\cdots) = a$$

所以

$$1+2a = a$$

故得 $a=-1$ 眞是匪夷所思, 正確的作法見略解。

用這種方式解釋「無限大不是一個數」, 學生很容易接受。

[丙] (9)、(10)、(11)、(12)、(13) 求五個定積分之值, 第 (10) 題要小心把 x 分成正、負兩種情況來處理, 第 (13) 題數年前本校月考考過, 當時幾乎是全軍覆沒, 以後老師都補充了這類需要換變數 (change variable) 的題目, 應該不是難題。

[丁] 有三題要用微積分基本定理, (14) 很容易, (15) 要是了解連鎖原理作起來很快, 不用連鎖原理也可以作,(16) 題有些學生忘了 $2x$ 所以作錯了。

[戊] (17) 橢圓面積公式 πab 是常識, 這題是送分題、不用作一看就會、可是還是有人拿不到分數, (18) 取材自課本, 原題繞 x 軸旋轉, 此處繞 y 軸旋轉。

[己] (19)(20)(21) 取材自課本, 多數學生作對。

[庚] 如果把二圓 $x^2+y^2=4$ 與 $x^2+y^2=4x$ 所圍的公共區域繞 x 軸旋轉所得旋轉體之體積, 看成前者繞 x 軸旋轉所得旋轉體體積之二倍, 就比用後者簡單多了, 沒有想到這一點會很繁、所以作對的不多。

計算題的 (1) 是送分題仍然有四分之一學生不會作,(2) 與 (3) 是要花些時間的, 尤其是 (3) 一不小心就把拋物線與圓的二切點誤作拋物線與 x 軸的交點, 既浪費了時間又沒有拿到分數。

試題設計時就考慮到考試時間 70 分鐘,(15)、(16) 沒有講過, 計算題的 (2) 與 (3) 較費時間, 四題共 16 分, 其它 84 分都是「平淡無奇、乏善可陳」, 也有老師說再多十分鐘計算題的 (3) 會有更多人作出來, 當然 80 分以上的與 100 分的也就多得多了。試題送往教務處之前我曾請陳麗如老師演算一遍, 她給予肯定評估。監考時沒有人提前交卷, 考到六十五分鐘時, 看看走廊只有兩個學生, 收考卷時沒聽到一迭聲的“完了!完

了”這才放心、看了自己兩班考卷頓覺輕鬆,出這種全年級的試題壓力很大, 謝天謝地很可以輕鬆一陣子不會輪到我命題了, 謝謝陳老師演算本試題。大專教師出題不會這麼緊張, 自己命題自己改卷, 考卷不發給學生看, 出了錯學生不敢講沒有人知道, 命題高明也只有自己欣賞, 如人飲水冷暖自知, 是幸也是不幸。

這次考題與參考答案都是使用 WORD 5.0 製作, 我對它一見鍾情, 希望大家多多愛用, 它一定是咱們學數學的設計的, 眞是「善體我意深得我心」, 如果不信一試便知, 聽說 Latex 與 AMI PRO 更好, 不過我已經很滿意了。我在打考卷時積分符號、極限、直線段旁標以上下限有些困難, 以往在 PC-XT 上使用的慧星一號 (CWI), 吳隆盛老師造了些符號給大家用很是享受, 這部 PC-XT 自民國76年使用到82年, 去年五月實在不勘使用所以又有了新的486, 可是 PC-XT 上 CWI 的吳氏造字拷到486硬碟上不能用, 多方求助知道了 WORD 5.0 的大名, 可是用起來不太靈光, 使用手用 (USER MANUAL) 總是語焉不詳, 張系國作過一首打油詩「使用手册就和房事一樣, 好的手册令你仙仙欲死; 壞的手册, 總算聊勝於無」原來使用手册都是一樣的, 在打電話騷擾過賴敦生與王元坤兩位老師數次之後,「插入→ 物件 → equation 」的要領弄淸楚了, 完成了這次考題謹此致謝。

區間	人數	每一*號表10人
0− 4	1	
5− 9	0	
10−14	0	
15−19	0	
20−24	10	*
25−29	11	*
30−34	9	*
35−39	29	***
40−44	68	*******
45−49	36	****
50−54	90	*********
55−59	99	**********
60−64	222	**********************
65−69	121	************
70−74	136	**************
75−79	136	**************
80−84	186	*******************
85−89	75	********
90−94	107	***********
95−99	47	*****
100	17	**

三年級總人數 1372

作個總結, 第 (1) 與 (2) 題約有一半的學生不會, 並不是學生不知道 “上和” 與 “下和” 的定義, 而是課本例題、習題裡求 “上和” 與 “下和” 的函數都是二次式與三次式, 考題是一次式沒有見過, 所以就手忙脚亂了。第 (3) 題就全體答對是因爲直接從三角形區域求面積, 沒有從“上和”與“下和”用極限來逼近。學生希望數學考題都是“見過

的”或“作過的” 就得心應手, 碰到沒見過的就拿不到分數了。所以 (1) 與 (2) 題的表現很是正常。

第 (5) 題不宜過度補充, 如何使用泰勒展開式 (以及1'Hospital's Rule) 來求不定型的極限, 前者是高三下的教材, 後者未列入中等教材。

第 (7) 題計算繁度較高, 大部份學生都會, 當然是學生絕對多數都記得

$$1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4} \quad (1)$$

所以作對學生高達 92/99=93%, 提到這類公式筆者就陣陣暖流湧遍全身, 筆者讀高二時, 課本有 (1) 與

$$1+2+3+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2} \quad (2)$$

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad (3)$$

其中 (2) 在初中已學過, 可是沒有列出 $1^4+2^4+3^4+\ldots+n^4$, 我就用分項抵消法得到 $\frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}$, 其中 $3n^2+3n-1$ 裡的-1我不能接受以爲作錯了, 因爲 (1)、(2)、(3) 裡的係數都是正整數, 我驗算又一算再算, 一直把 n 算到七十或八十已經不記得了, 只記得沒有算到一百, 愈算愈高興愈算愈有信心, 後來在一 本參考書裡找到這個公式和我的一樣, 這才不往下作了。

一位太太自殺, 一步步走向淡水河中央, 河水太臭她又回來了, 爲甚麼呢? 因爲她先生有了外遇, 那不是很平常的事兒嗎? 她不能接受這個事實, 因爲她先生表現正常, 按時回家吃飯也從不外宿, 沒想到他居然在外面有個女人, 絕對守規矩的模範學生居然逃課, 天哪天哪實在活不下去了, 嘻嘻!這種事兒心理上早就應該有準備, 我在三十八、九年前接受了 $3n^2+3n-1$ 裡的 -1, 後來在數學上又接受了很多大異常理的事實。

有的老師說第 (10) 題要根據 $x\geq 0$ 與 $x<0$ 討論, 四分之三以上的學生都會作, 可見現在的學生對於 $y=|x|$ 的理解大都能掌握。可是本題如果改成

$$\int_{-1}^{2}(x+|x-1|+|2x+3|)^2dx$$

當然很多學生都不會作了, 這一點數播讀者要能理解, 這次考試的時間是七十分鐘, 這題要分成幾個二次函數的定積分, 要用多少時間, 請大家試試。民國五十年大專聯考出了些絕對值的題目, 三萬考生一萬零分, 那時高中不教絕對值, 打破歷年聯考記錄。

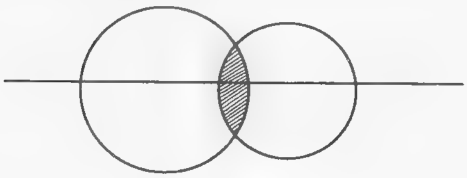
作函數 $y=|x-1|+|x-2|$ 的圖形, 這種題目初一不能教、初二不能教、初三不能教、高一不能教、高二不必教、高三應該教, 是數學老師應有的理念。爲甚麼高二不必教? 因爲高二教每班五十名學生裡大約有二十五名可以立即接受, 高三教理組學生可以全體接受, 或至少四十五名左右接受沒有問題, 那又何必在高二教呢。

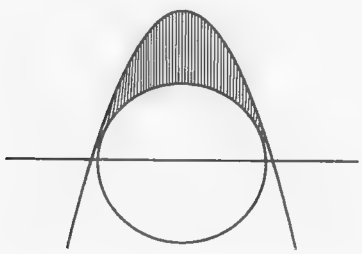
學生對於求繞 y 軸旋轉的旋轉體體積不太會求, 是因爲課本裡只有繞 x 軸旋轉的旋轉體體積公式, 沒有公式可代又沒有想到可以把 x 看作 y 的函數對 y 積分, 所以不會的就很多了。

對於求封閉區域繞某直線旋轉所得旋轉體的體積, 在形式較爲簡單時都表現不錯, 例如



如果形式較不規則或較複雜就不會作, 例如





好像是學生沒有畫圖或不會畫圖道理也很簡單, 自從民國五十四年數學教材歷經三次改革, 現行的這一套是民國七十三年升高一的學生開始啓用, 其中圓錐曲線作了很大的修正, 需要用到旋轉平移來化簡方程式的都刪去了, 也沒有含 xy 項的, 所以學生畫圖能力差是很正常現象。

七十六年筆者就感受到高三學生的三角很差, 不但基本運算不熟, 三角函數的圖形更是一團糟。數學本來就是學子夢魘, 三角更是夢魘裡的夢魘. 有太多的公式, 有些連背都背不下來。數學公式是不用背的, 只要會證明就記住了, 可是每班五十多名學生有一名去把公式證證就很高興了, 有二名就是豐收; 再看看高一課本, 以往三角在高一下學期要教一學期, 被修訂成只教一個月, 高中教師應該感受強烈, 有些事可以速成, 學問可不能速成。數學老師的共同理念是要「教得少教得正常」, 那麼國文呢? 他們不一樣他們是要「教得多教得好」。

第 (14)、(15)、(16) 是微積分基本定理相當機械化的應用, 高中生對它是相當感冒的, 出上三題當然是聊備一格, 看看答對人數也是恰如其份。

有人說建中沒有以前好了, 更有人說建中沒落了, 都不是事實。民國四十七年台灣人口一千萬, 那時建中高三有七個班; 民國八十四年台灣人口二千萬, 建中高三有三十三個班。教育普及當然是好現象, 從高三全體1372名學生的成績分佈來看, 是個中間偏右的分配, 不是大家熟悉的常態分配, 對三年前以第一志願考進來的學生來說是很正常的。

附錄 1:

台北市立建國高級中學八十三學年度第一學期高三自然組數學科期中考試題

填空題 每空格 4 分 88%

【甲】由直線 $y=0, y=2x$ 及 $x=4$ 所圍成的區域 S,把原點至 $(4,0)$ 間的線段等分成 n 段，通過些分點把 s 分成 n 個長條,然後作出每個長條的上矩形與下矩形，(1) 求上和 (2) 求下和 (3) s 的面積

【乙】在 $n\to\infty$時 求下列各式之極限

(4) $\dfrac{1+3+5+\ldots+(2n-1)}{n^2}$ (5) $n\sqrt{\dfrac{n-3}{n+3}}-n$ (6) $\sqrt{n}(\sqrt{n+2}-\sqrt{n-2})$

(7) $\dfrac{1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3}{n^4}$ (8) $(1-\dfrac{1}{2^2})(1-\dfrac{1}{3^2})\ldots(1-\dfrac{1}{n^2})$

【丙】求下列各定積分之值

(9) $\int_0^2(2x+1)^2dx$ (10) $\int_{-1}^2(x+|x|+1)^2dx$ (11) $\int_0^2\dfrac{x}{\sqrt{x^2+4}}dx$

(12) $\int_0^2\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+5}}dx$ (13) $\int_1^2x\sqrt{x^2-1}dx$

【丁】求下列各函數 f(x) 之導函數 (14) $\int_x^1\sqrt{1-t^2}dt(0<x<1)$ (15) $\int_1^{x^2}(t+2)dt$

設 $g(x) = x\int_1^x\dfrac{dt}{t}+2x, x>0$ 則 $xg'(x)-g(x)$ = (16)

【戊】橢圓 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 之面積爲 (17) 繞 Y 軸旋轉所得旋轉體之體積爲 (18)

【己】 拋物線 $y=x^2-1$ 與 X 軸所圍區域爲 T, (19) 求 T 之面積,
求 T 繞 (20) X 軸 (21) Y 軸 旋轉所得旋轉體之體積

【庚】 二圓 $x^2+y^2=4, x^2+y^2=4x$ 所圍成的公共區域爲 S, (22)
求 S 繞 X 軸旋轉所得旋轉體之體積

計算題 12%

拋物線 P: $y=-x^2+k$ 與 圓 Q: $x^2+y^2=1$ 切於二點, (1) 求 k 值 (4 分)
(2) P 與 x 軸所圍區域之面積 (4 分) (3) P 與 Q 所圍區域繞 x 軸旋轉所得旋轉體之體積 (4 分)

附錄 2:

台北市立建國高級中學八十三學年度第一學期高三自然組數學科期中考答案

填空題

(1)	$16(1-\frac{1}{n})$	(2)	$16(1+\frac{1}{n})$	(3)	16	(4)	1
(5)	-3	(6)	2	(7)	$\frac{1}{4}$	(8)	$\frac{1}{2}$
(9)	$\frac{62}{3}$	(10)	$\frac{65}{3}$	(11)	$2\sqrt{2}-2$	(12)	$\sqrt{13}-\sqrt{5}$
(13)	$\sqrt{3}$	(14)	$-\sqrt{1-x^2}$	(15)	$2x(x^2+2)$	(16)	x
(17)	πab	(18)	$\frac{4\pi a^2 b}{3}$	(19)	$\frac{4}{3}$	(20)	$\frac{16\pi}{15}$
(21)	$\frac{\pi}{2}$	(22)	$\frac{10\pi}{3}$				

計算題

(1)	$k=\frac{5}{4}$	(2)	$\frac{5\sqrt{5}}{6}$	(3)	$\frac{3\sqrt{3}\pi}{10}$

— 本文作者任教於台北市立建國中學 —

⊙存款後由郵局掣給正式收據爲憑，本單不作收據用

⊙帳戶本人存款此聯不必填寫，但請勿撕開。

郵政劃撥儲金存款通知單

收款帳戶	帳號	0 1 0 0 4 3 4 8	帳號未滿八位數者，帳號前空格請填0。
	戶名	中央研究院數學研究所	

新臺幣

（請用壹、貳、參、肆、伍、陸、柒、捌、玖、零等大寫並於末加一整字）

經辦局郵戳	寄款人	姓名	
		住址	（郵遞區號）□□□
		電話	

本聯經登帳後隨郵政劃撥儲金收支詳情單寄交帳戶

主管：

經辦員：

主管：

經辦員：

收據號碼：

郵政劃撥儲金存款單

收款帳戶	帳號	0 1 0 0 4 3 4 8	帳號未滿八位數者，帳號前空格請填0。
	戶名	中央研究院數學研究所	

新臺幣

（請用壹、貳、參、肆、伍、陸、柒、捌、玖、零等大寫並於末加一整字）

經辦局郵戳	寄款人	姓名	
		住址	（郵遞區號）□□□
		電話	

虛線內備機器印證用請勿填寫。

交易代號：0501現金存款0502現金存款（無收據）0503票據存款0505大宗存款

本聯由儲匯局劃撥處存查
180,000束（100張）245×130mm
（60P.模）（彰聯）保管五年

請存款人注意

一、帳號、户名及寄款人姓名、住址請詳細填明，以免誤寄。抵付票據之存款，務請於交換前一天存入。
二、每筆存款至少須在新臺幣十元以上。
三、倘金額塗改時請另換存款單填寫。
四、本存款單不得黏貼或附寄任何文件。
五、本存款金額業經電腦登帳後或本存款單已經受理郵局寄出者，不得申請撤回。
六、本存款單帳戶亦得依式自印，但各欄文字及規格必須與本單完全相同，如有增刪或改印其他文字者，應請存款人另換本局印製之存款單填寫。

通信欄

本人擬訂購<<數學傳播季刊選輯>>

- ☐ 1. 數學傳播季刊索引（一）（20元）
- ☐ ~~2. 幾何論叢（一）（60元）~~（已售完）
- ☐ 3. 數學問題百則（一）（120元）
- ☐ 4. 複數解析初步（120元）

<<數學傳播季刊>>

☐ ______卷______期起______年

或

☐ ______年______月起______年

備註：1. 十六卷三期(63)之前已無存書，十六卷三期(81年9月)起每期80元，每卷(一年)300元。
2. 本刊一卷(一年)四期，每年3、6、9、12月出刊。

此欄係備寄款人與帳户通訊之用，惟所作附言應以關於該次劃撥事宜爲限 **否則應請換單另填。**

周鴻經先生事略

周鴻經綸閣先生，生於民國前十年，歿於民國四十六年，享年五十有六。先生天性淳厚，篤於孝友，英年績學，才華卓著。歷任中央大學數學系主任、訓導長、教務長、校長及中央研究院總幹事兼數學研究所所長。畢生從事數學研究及教育工作，不遺餘力。

先生早年留學英國，於抗戰時期毅然返國，共赴國難。戰時艱苦，衣食為勞，而先生仍能創著不絕，年有新獻，於富氏級數方面先後發表論文二十二篇，為當時國內年輕數學家之典範。

先生不僅對數學研究有卓異造詣，其於教育行政亦有建樹。多年執教，桃李滿天下，受其薰陶者，莫不眷眷於懷。

先生於努力研究之餘，曾在各報章雜誌發表諸多數學教育文章，並編著中學教科書多冊為當時中學普遍採用，對於日後數學教育之改革有深遠之影響。

中央研究院周鴻經獎學金章程

第一條　中央研究院爲紀念數學研究所周故所長鴻經，鼓勵有志研習數學之學生，設置數學獎學金。

第二條　本獎學金暫定十二名，每名每年暫定新台幣貳萬元。

第三條　凡公私立大學或學院之數學系三年級以上學生或數學研究所之研究生數學成績優異者均可申請。

第四條　申請本獎學金之學生應於每年十一月十五日前，由所屬院校將下列各件彙送本院：

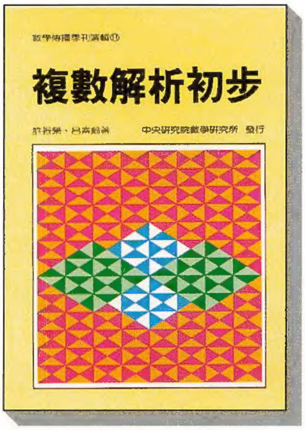
(1)志向說明書：

(2)在學各學年之成績單（一年級研究生須繳大學四年之成績單）

(3)數學系、所之教授二人以上之推薦書。

第五條　本獎學金之審核由本院數學研究所組織委員會行之，必要時得舉行面試，其結果於每年十二月十五日發表。獎學金於十二月及三月各付給總數之半。

第六條　本章程經院務會議通過院長核定後施行。







有了"數學傳播季刊選輯"
讓您大開眼界！

■數學傳播季刊創刊十年的里程碑
■由數十位專家共同執筆
■數學傳播季刊編輯部精心編輯
■適合高中以上程度閱讀

數學傳播季刊選輯

台北市南港區研究院路二段128號（電話：785-1211轉382）
郵政劃撥：中央研究院數學研究所　帳號：0100434-8